

**Modellierung und Diskretisierung
bewegter Diskontinuitäten
in randgekoppelten Mehrfeldsystemen**

Andreas Kölke

**Institut für Statik
Technische Universität Braunschweig
Bericht Nr. 2005-99**



Modellierung und Diskretisierung bewegter Diskontinuitäten in randgekoppelten Mehrfeldsystemen

Vom Fachbereich Bauingenieurwesen
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig
zur Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Ing. Andreas Kölke

aus Dresden

Eingereicht am

7. Juli 2004

Mündliche Prüfung am

10. Mai 2005

Berichter

Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler

Prof. Dr.rer.nat. Thomas Sonar

Prüfer

Prof. Dr.rer.nat. Heinz Antes

Braunschweig 2005

ISBN 3-926031-34-4

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler

© Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, 2005

Kurzfassung

Ein numerisches Verfahren zur Lösung von Ingenieuraufgaben mit unstetigen Beschreibungsgrößen entlang instationärer Grenzflächen wird vorgestellt.

Zahlreiche Modelle des Ingenieurwesens sind geprägt durch die Existenz starker und schwacher Diskontinuitäten. Dazu gehören unter anderem bi-materielle Kontaktflächen, Reaktionsfronten chemischer Prozesse, Erstarrungsvorgänge, Grenzflächenphänomene mehrphasiger Flüssigkeiten und der Fortschritt diskreter Risse in elastischen Strukturen. Die Bewegung solcher Kontaktflächen ist bestimmt durch die Dynamik des zugrunde liegenden physikalischen Prozesses. Für viele Aufgaben ist der Verlauf der Zustandsgrößen auf und in der Umgebung einer Grenzfläche von entscheidender Bedeutung für das Verhalten des Gesamtsystems. Die Herausforderungen bei der numerischen Lösung solcher Problemstellungen liegen in der Beschreibung der Bewegung einer sich topologisch ändernden Grenzfläche sowie der Behandlung grenzflächeninduzierter Diskontinuitäten. Eine Analyse der problemabhängigen Modellgleichungen ergibt für viele praxisrelevante Anwendungen einen unstetigen Verlauf der Beschreibungsgrößen an der Grenzfläche. Das numerische Lösungsverfahren sollte – gerade bei grenzflächensensitiven Aufgabenstellungen – dem charakteristischen Verlauf der Beschreibungsgrößen an der Grenzfläche Rechnung tragen und eine einfache Realisierung der Übergangsbedingungen ermöglichen.

Die Level-Set-Methode wird zur Beschreibung komplexer, in der Zeit veränderlicher Grenzflächengeometrien und deren Bewegung in einem externen Geschwindigkeitsfeld eingesetzt. Auf Grundlage einer gewichteten Integralformulierung der Modellgleichungen findet zur Erfassung a priori bekannter C_0 - und C_1 -unstetiger Beschreibungsgrößen entlang der Grenzfläche ein lokales Anreicherungskonzept der Funktionsapproximation Anwendung. Die Kombination von Level-Set-Methode, konsistenter Anreicherung des Ansatzraumes und der Diskretisierung der Modellgleichungen mit finiten Raum-Zeit-Elementen ermöglicht die diskrete Beschreibung unstetiger Lösungen entlang bewegter Grenzflächen in Raum und Zeit.

Beispielhafte Anwendungen aus dem Bereich der Zwei-Fluid-Strömungen belegen die Flexibilität des Verfahrens im Hinblick auf deutlich deformierte Grenzflächen und stark unstetige Lösungsverläufe. Weiterhin wird die Methodik zur Beschreibung von Materialgrenzen und diskreten Rissen in elastischen Strukturen eingesetzt. Die Untersuchung ausgewählter Fluid-Struktur-Wechselwirkungen schließt die Arbeit ab und demonstriert Eignung und Effizienz des vorgestellten numerischen Lösungsverfahrens für komplexe Aufgabenstellungen des Ingenieurwesens.

Abstract

A numerical solution scheme is introduced for the solution of engineering tasks involving discontinuous physical quantities along moving interfaces.

Numerous models in engineering are concerned with the existence of strong and weak discontinuities, occurring with bi-material contact surfaces, chemical reaction fronts, solidification processes, two-fluid flow with surface tension, or propagation of discrete cracks in elastic solids. The motion of these interfaces is governed by the dynamics of the underlying physical process. The shape of physical quantities across and nearby the interface can strongly influence the behavior of the coupled multifield system. The challenge within the numerical solution of such problems is in describing the motion of a topologically changing interface or front and in the treatment of interface induced nonlinearities. For a number of tasks relevant in practice, an analysis of the problem dependent model equations leads to discontinuous solutions across the interface. A numerical solution strategy should, even in case of interface sensitive problems, carefully treat the approximation of physical quantities at the interface and ensure the efficient realization of coupling conditions.

The level set method is applied to describe the motion of a front with complex geometry and changing topology in an externally given velocity field. Based on a weighted integral formulation of the model equations, a local enrichment scheme of the ansatz is used for the representation of a priori known C_0 - and C_1 -discontinuous physical quantities. The combination of the level set method, a consistent enrichment of the approximation space and the discretization of the model equations with space-time finite elements allows the discrete capturing of weak and strong discontinuous solutions in space and time.

Exemplary applications in the field of two-fluid flow show the ability of the method to deal with deformed interfaces and strongly discontinuous physical variables. Further, the methodology is applied to simulate bi-material interfaces and discrete cracks in elastic structures. The investigation of selected fluid-structure interaction phenomena concludes the thesis and demonstrates the suitability and efficiency of the presented numerical method for complex tasks in engineering.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit ist während meiner Tätigkeit als Stipendiat der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) im Graduiertenkolleg „Wechselwirkung von Struktur und Fluid“ am Institut für Statik der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig entstanden.

Meine Anerkennung gilt dem Engagement der an diesem interdisziplinär ausgerichteten Graduiertenkolleg beteiligten Professoren, Kollegiaten und Stipendiaten. Die stete Möglichkeit zu intensiver und kritischer fachlicher Diskussion hat meine eigenen Arbeiten sehr beeinflusst und unterstützt.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler danke ich sehr für den gewährten Freiraum bei der Ausrichtung und Durchführung dieser Arbeit. Herrn Prof. Dr.rer.nat. Thomas Sonar danke ich für die bereitwillige Übernahme des Zweitgutachtens und Herrn Prof. Dr.-Ing. Manfred Krafczyk für die Leitung der Prüfungskommission.

Mein besonderer Dank gilt Dr. Björn Hübner und Thomas-Peter Fries, die mich nicht zuletzt in der Schlußphase meines Promotionsvorhabens tatkräftig beraten haben.

Meine Familie verdient meine tiefste Dankbarkeit für ihre verständnisvolle Unterstützung, die wesentlich zum Fortschritt und Erfolg meines arbeitsreichen Unterfangens beigetragen hat.

Braunschweig, im Mai 2005

Andreas Kölke

Wir stürzen.

Inhalt

1. Einleitung	1
1.1 Motivation, Zielsetzung und Aufbau der Arbeit	1
1.2 Modellbildung	4
1.3 Gewichtete Residuen	12
1.4 Lösungsverfahren - Raum-Zeit-Finite-Element-Methode	14
2. Zeitveränderliche Gebiete und Fronten	19
2.1 Anforderungen und Überblick	19
2.1.1 Explizite Beschreibungsformen	22
2.1.2 Implizite Beschreibungsformen	24
2.2 Level Set Methode	26
2.2.1 Eigenschaften	26
2.2.2 Hamilton-Jacobi-Gleichungen und Erhaltungsgleichungen	31
2.2.3 Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung	33
2.2.4 Konvergenzuntersuchungen	35
2.2.5 Normale und Krümmung der Grenzfläche	38
2.2.6 Reinitialisierung	39
2.2.7 Verbesserung der Erhaltungseigenschaften	41
3. Diskontinuierliche Beschreibungsgrößen	43
3.1 Anforderungen und Überblick	43
3.2 Angereicherte Finite-Element-Ansätze	44
3.2.1 Partition-of-Unity-Konzept	45
3.2.2 Wahl der Anreicherungsfunktion	46
3.2.3 Diskretisierung mit finiten Raum-Zeit-Elementen	48
3.2.4 Numerische Integration der modifizierten Ansätze	51
3.3 Einbringen von Übergangsbedingungen	53
3.3.1 Lagrange-Multiplikator-Formulierung	54
3.4 Lösungsstrategie für das gekoppelte Gesamtsystem	55
3.5 Konvergenzuntersuchungen	58

4. Elastische Festkörper	69
4.1 Modellbildung	70
4.2 Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung	73
4.3 Scheibe mit Störstelle	76
4.4 Scheibe mit Riß	79
5. Zwei-Fluid-Strömungen	83
5.1 Modellbildung	84
5.2 Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung	87
5.3 Wasserwelle in ruhendem Behälter	89
5.4 Dammbruch - kollabierende Wassersäule	92
5.5 Aufsteigende Gasblase	95
6. Zwei-Fluid-Struktur-Interaktion	101
6.1 Modellbildung	102
6.1.1 Kopplung von Fluid und Struktur	104
6.2 Wasserwelle in fremderregtem Behälter	106
6.3 Dammbruch auf Hindernis	110
6.3.1 Starres Hindernis	112
6.3.2 Elastisches Hindernis	114
6.4 Gleichgewichtslagen schwimmender Körper	118
7. Zusammenfassung und Ausblick	123
7.1 Zusammenfassung	123
7.2 Ausblick	125
Literatur	127

Hinweise zur Notation

Skalarwertige Größen sind mit kleinen Buchstaben des lateinischen bzw. griechischen Alphabets bezeichnet. Für Vektoren werden in der Regel fette Kleinbuchstaben verwendet. Matrizen und Tensoren sind mit fetten Großbuchstaben gekennzeichnet.

Dezimalzahlen sind mit Punkt notiert.

1. Einleitung

1.1 Motivation, Zielsetzung und Aufbau der Arbeit

In vielen Bereichen des Ingenieurwesens liegen Aufgabenstellungen vor, bei denen Körper über ihre Oberfläche durch verschiedene physikalische Vorgänge interagieren und das Verhalten eines gesamten Systems stark beeinflussen. Dazu zählt die Strömungsdynamik mehrphasiger unmischbarer Fluide, sowie der Beanspruchungszustand von Böden und Bauteilen mit mehreren vielfältig geformten Einschlüssen und Schichten unterschiedlichen Materials bzw. Materialverhaltens. In der Verfahrenstechnik ist das Verhalten von Bewegungsfronten chemischer Reaktionen und der zeitliche Fortschritt erstarrender Schmelzen von Interesse. Im Bauingenieurwesen und Maschinenbau besteht Bedarf an der Erklärung von Strömung-Struktur-Interaktionsphänomenen um moderne Anlagen und Konstruktionen kosteneffizient und gleichzeitig gebrauchssicher zu realisieren.

Die Abstraktion der physikalischen Wirklichkeit zu vereinfachenden und leichter zu beschreibenden Gedankenmodellen, die die wesentlichen Vorgänge berücksichtigen, ist der erste Schritt zum Verständnis komplexen Systemverhaltens. Es ist daher zweckmäßig, eine Idealisierung der genannten Aufgaben vorzunehmen und sie als Systeme mehrerer wechselwirkender physikalischer Felder zu beschreiben. Mehrfeldprobleme sind durch die Interaktion verschiedener Felder charakterisiert. Felder fassen physikalische Grundgrößen im kontinuumsmechanischen Sinn als Dichten in einem Raum-Zeit-Kontinuum auf. Die als Kontinua modellierten Körper eines Systems sind entlang eines gemeinsamen Randes gekoppelt, an dem der Austausch von Masse, Impuls und mechanischer Energie stattfindet.

Das Ziel der Arbeit ist die Entwicklung eines numerischen Verfahrens zur Vorhersage des instationären Verhaltens randgekoppelter Mehrfeldsysteme unter besonderer Berücksichtigung sich stark verformender und topologisch ändernder Kopplungsflächen. Ausgehend von nichtlinearen Modellgleichungen für das physikalische Verhalten der Teilsysteme, ist eine starke Kopplung der beteiligten Körper an der bewegten Grenzfläche anzusetzen und in der Auswahl einzusetzender Methoden zu berücksichtigen. Am Kopplungsrand sind aufgabenabhängig stark und schwach diskontinuierliche Verläufe der Zustandsgrößen möglich, die das Systemverhalten maßgeblich beeinflussen kön-

nen. Das numerische Verfahren auf Grundlage der Raum-Zeit-Finite-Element-Methode muß daher in der Lage sein, unstetige Lösungsverläufe entlang einer bewegten Grenzfläche in Raum und Zeit darzustellen und problemspezifisch modellierte Übergangsbedingungen am Kopplungsrand zu realisieren. Anhand unmischbarer inkompressibler Zwei-Fluid-Strömungen, für die die Navier-Stokes-Gleichungen gelten, ist das Berechnungsmodell hinsichtlich der sensitiven Grenzflächendynamik unter Schwerkräfteinfluß zu überprüfen. Einsatzmöglichkeiten zur Untersuchung elastischer Festkörper sind für einschluß- und rißbehaftete Modellsituationen aufzuzeigen. Die Analyse von Fluid-Struktur-Wechselwirkungsphänomenen aus dem Bereich der Hydroelastik ist durch Synthese des zuvor validierten Zwei-Fluid-Lösungsverfahrens mit einem bestehenden monolithischen Berechnungsmodell durchzuführen.

Das zugrundeliegende Gedankenmodell randgekoppelter Kontinua stellt Abschnitt 1.2 vor und führt die in dieser Arbeit verwendeten kontinuumsmechanischen Größen und Beziehungen ein. Neben Kinematik, Bilanzgleichungen und Konstitutivbeziehungen steht die Formulierung der Übergangs-, Rand- und Anfangsbedingungen im Vordergrund. In Abschnitt 1.4 werden die Modellgleichungen in eine ihrer numerischen Lösung zugängliche Form gebracht. Für den Verlauf der Beschreibungsgrößen in den Bestimmungsgleichungen sind Ansätze mit einer endlichen Anzahl Unbekannter zu formulieren. Die Ansätze für die physikalischen Zustandsgrößen und die Geometrie des Berechnungsgebietes sind mit finiten Raum-Zeit-Elementen zu diskretisieren.

Kapitel 2 diskutiert Modelle zur diskreten Beschreibung sich bewegender und verändernder Grenzflächen und bewertet deren Eignung hinsichtlich der numerischen Umsetzung für verschiedene Aufgabenstellungen. Hierbei findet die Level-Set-Methode besondere Betrachtung, da sie sich durch hohe Flexibilität auszeichnet und ihre Eigenschaften für das Konzept der in dieser Arbeit vorgestellten Konstruktion lokal angereicherter Approximationen wesentlich sind.

Bei vielen Aufgabenstellungen ist die Existenz einer Grenzfläche verbunden mit physikalischen Zustandsgrößen, deren Verlauf oder Ableitungen an dieser Stelle Sprünge aufweisen. Diese Phänomene können durch numerische Standardverfahren nur mit verminderter Genauigkeit abgebildet werden, was oft mit der Verschlechterung des Konvergenzverhaltens verbunden ist. Kapitel 3 zeigt, daß mit der aus den Modellgleichungen ableitbaren Kenntnis über die Lage und Art auftretender Diskontinuitäten, der finite Ansatzraum geeignet erweiterbar ist, so daß der diskontinuierliche Verlauf physikalischer Variablen ohne Einbußen in den Konvergenzeigenschaften beschrieben werden kann.

Kapitel 4 zeigt die Anwendbarkeit des Verfahrens auf Aufgaben der Strukturmechanik für linear elastisches Materialverhalten. Neben Kontaktunstetigkeiten, resultierend aus Einschlüssen, ist die numerische Untersuchung des Deformationsverhaltens elastischer

Strukturen mit diskreten Rissen möglich, ohne das Berechnungsnetz in einem vorgelegten Schritt der konkreten Rissituation anpassen zu müssen. Unter Einführung geeigneter Modellgesetze ist die Simulation dynamischen Rißwachstums durchführbar.

Exemplarisch ist die entwickelte Methodik in Kapitel 5 zur Beschreibung unmischbarer Zwei-Fluid-Systeme eingesetzt. Effekte aus Oberflächenspannung an der Grenzfläche zwischen den inkompressiblen und reibungsbehafteten Fluiden können, gerade im Hinblick auf den daraus resultierenden Drucksprung, berücksichtigt werden. Die Untersuchung schwerkraftdominierter dynamischer Systeme erfolgt am Beispiel einer in einem Behälter schwingenden Fluidmasse und dem Kollaps einer Wassersäule. Die Wirkung der Oberflächenspannung ist anhand aufsteigender Blasen in verschiedenen Regimen demonstriert. Nach Möglichkeit erfolgt der Vergleich der numerischen Ergebnisse mit analytischen bzw. experimentellen Ergebnissen.

Kapitel 6 unternimmt die Analyse gekoppelter Systeme bestehend aus reibungsbehafteter Zwei-Fluid-Strömung und elastischer Struktur. Die Anwendungen dieses Abschnittes greifen im Wesentlichen auf das Lösungsverfahren von Hübner [45] und Walhorn [106] für streng gekoppelte Fluid-Struktur-Systeme unter Verwendung eines monolithischen Ansatzes zurück. Dem Strömungsgebiet liegt nun ergänzend das in Kapitel 5 beschriebene Zwei-Fluid-Modell zugrunde. Anhand einer auf eine nachgiebige Struktur zusammenfallenden Wassersäule ist die Integrierbarkeit des Zwei-Fluid-Modells in eine bestehende Fluid-Struktur-Kopplungsformulierung verdeutlicht. Weitere Beispiele zeigen die Eignung des Lösungsansatzes zur Untersuchung von Interaktionsphänomenen voll- und teilgetauchter Körper, sowie der Simulation schwappender Flüssigkeiten in federgelagerten Behältern, die als flüssigkeitsbasierte Dämpfungseinrichtungen der Beschränkung auftretender Strukturverformungen bei Bauwerken unter dynamischer Anregung dienen.

1.2 Modellbildung

Mehrfeldaufgaben. Im Mittelpunkt der Betrachtung stehen randgekoppelte Mehrfeldaufgaben. Das zu betrachtende Gesamtsystem besteht aus einer Anzahl sich räumlich nicht durchdringender Kontinua i , die das Raum-Zeit-Gebiet $Q = \cup(\Omega_i) \times I$ im Zeitintervall I belegen. Zweifeldaufgaben sind charakterisiert durch die Existenz zweier auf einem gemeinsamen Rand $R = \Sigma \times I$ gekoppelter Kontinua in $Q_1 = \Omega_1 \times I$ und $Q_2 = \Omega_2 \times I$, wie schematisch in Bild 1.1 gezeigt ist. Der äußere Rand $P = \Gamma \times I$ des Gesamtgebietes besteht aus den Rändern $P_1 = \Gamma_1 \times I$ und $P_2 = \Gamma_2 \times I$ der beiden Kontinua.

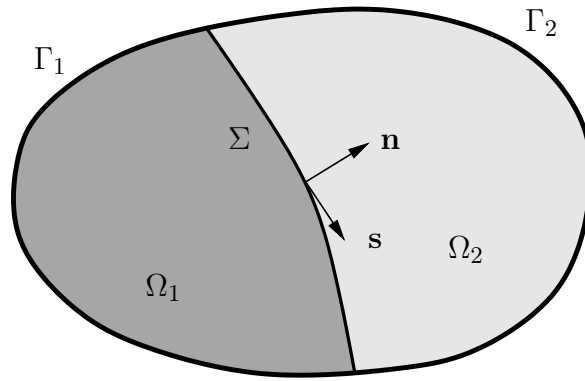


Bild 1.1: Randgekoppelte Kontinua.

Die im folgenden aufgeführten Grundlagen der Kontinuumsmechanik verwenden eine allgemeine gemischte Euler-Lagrange-Formulierung [34, 19] aus der die Lagrangesche und Eulersche Betrachtungsweise als Spezialfälle abgeleitet werden können. Die Darstellung verwendet orthogonal kartesische Koordinatensysteme und ist hinsichtlich der Notation an [19] angelehnt. Eine umfangreiche Einführung in die Kontinuumsmechanik einschließlich Begriffsdefinitionen und Herleitungen ist in [3] gegeben.

Kinematik des Kontinuums. Die das Gebiet Ω belegende, zusammenhängende Menge von Punkten eines Körpers heißt Konfiguration \mathcal{K} . Die Bewegung des Körpers kann als zeitliche Änderung der Konfiguration \mathcal{K} verstanden werden.

Die gemischte Euler-Lagrange-Darstellung verwendet weder die materielle Konfiguration \mathcal{K}^X , noch die momentane Konfiguration \mathcal{K}^x der klassischen Schreibweise der Kontinuumsmechanik als Bezugsconfiguration, sondern definiert zu diesem Zweck die Referenzkonfiguration \mathcal{K}^X . Die materielle Konfiguration \mathcal{K}^X in Ω^X beschreibt mit der Koordinate \mathbf{X} die Bewegung eines materiellen Punktes des Kontinuums. Die Momentankonfiguration \mathcal{K}^x nimmt das Gebiet Ω^x ein und beschreibt die aktuelle Situation von Material und Beobachter an jedem Punkt \mathbf{x} . Die Referenzkonfiguration \mathcal{K}^X erfasst

die Verteilung der Beobachterpunkte in Ω^χ mit der Koordinate χ . Die Konfigurationsdefinitionen mit zugehörigen Ortsvektoren veranschaulicht Bild 1.2.

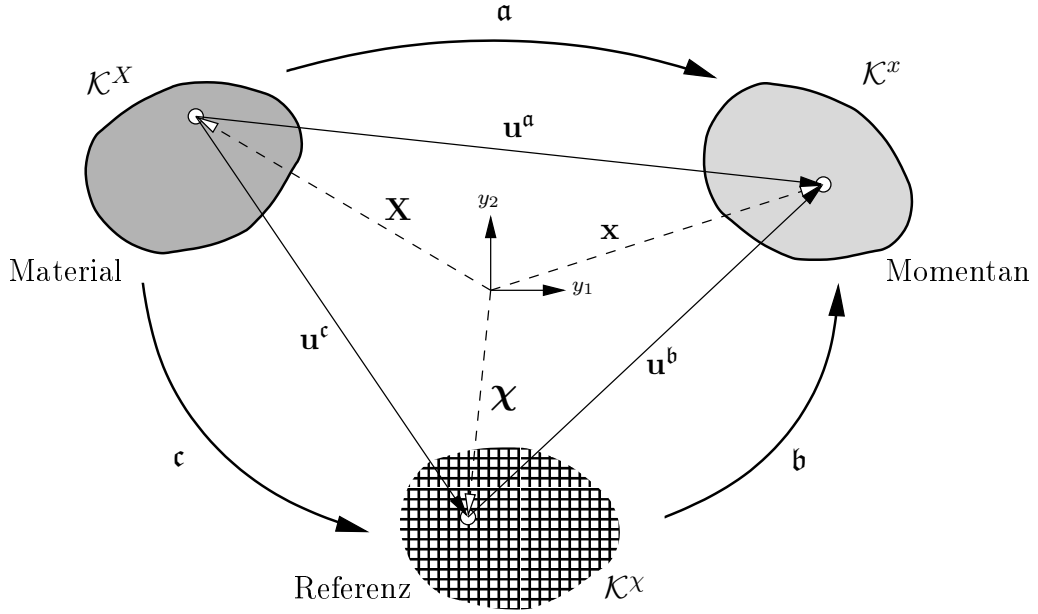


Bild 1.2: Konfigurationen des Kontinuums.

Eine Transformation zwischen den Konfigurationen gelingt durch Definition der bijektiven Abbildungsvorschriften

$$\mathbf{a} : \mathcal{K}^X \rightarrow \mathcal{K}^x, \quad (\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{X}, t) \quad (1.1)$$

$$\mathbf{b} : \mathcal{K}^\chi \rightarrow \mathcal{K}^x, \quad (\mathbf{x}, t) = \mathbf{b}(\chi, t) \quad (1.2)$$

$$\mathbf{c} : \mathcal{K}^X \rightarrow \mathcal{K}^\chi, \quad (\chi, t) = \mathbf{c}(\mathbf{X}, t) \quad (1.3)$$

aus denen nach Linearisierung die Jacobi-Matrizen

$$\mathbf{J}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^a & \mathbf{v}^a \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}^b = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^b & \mathbf{v}^b \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^c & \mathbf{v}^c \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

mit den Deformationsgradienten

$$\mathbf{F}^a = \mathbf{I} + \nabla_X \mathbf{u}^a, \quad \mathbf{F}^b = \mathbf{I} + \nabla_\chi \mathbf{u}^b, \quad \mathbf{F}^c = \mathbf{I} + \nabla_X \mathbf{u}^c \quad (1.5)$$

und den abbildungsbezogenen Verschiebungen und Geschwindigkeiten

$$\mathbf{u}^a = \mathbf{x} - \mathbf{X}, \quad \mathbf{u}^b = \mathbf{x} - \chi, \quad \mathbf{u}^c = \chi - \mathbf{X}, \quad (1.6)$$

$$\mathbf{v}^a = \left. \frac{\partial \mathbf{u}^a}{\partial t} \right|_X, \quad \mathbf{v}^b = \left. \frac{\partial \mathbf{u}^b}{\partial t} \right|_\chi, \quad \mathbf{v}^c = \left. \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial t} \right|_X \quad (1.7)$$

gewonnen werden. Die Unterscheidung verschiedener Zeitableitungen ist durch einen senkrechten Begrenzer mit dem Ortsvektor der festgehaltenen Bezugskonfiguration realisiert.

Der Deformationsgradient \mathbf{F} beschreibt die Abbildung eines inkrementellen Linienelementes von einer Konfiguration auf eine andere und erfaßt neben Verzerrungstransformationen auch Starrkörperbewegungen. Als Maß für die Verzerrung eines Körpers ist der Deformationsgradient daher ungeeignet. Für viele Anwendungen ist es zweckmäßig, ein Verzerrungsmaß zu definieren, das für Identitätsabbildungen und reine Starrkörperbewegungen den Wert Null annimmt. Dies gelingt mit dem symmetrischen Green-Lagrange-Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (1.8)$$

oder dem Almansi-Euler-Verzerrungstensor

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{-1}). \quad (1.9)$$

Die Verzerrungstensoren sind abbildungsabhängig mit einem der Deformationsgradienten \mathbf{F}^a , \mathbf{F}^b oder \mathbf{F}^c zu bilden.

Die zeitliche Änderung des Verzerrungstensors bezüglich der materiellen Konfiguration liefert die Tensoren der Verzerrungsgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{E}}$ und $\dot{\mathbf{A}}$. Im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich Verzerrungsgeschwindigkeitstensoren der α -Zuordnung benötigt:

$$\dot{\mathbf{E}}^a = \frac{1}{2} \left(\nabla_X \mathbf{v}^a + (\nabla_X \mathbf{v}^a)^T + (\nabla_X \mathbf{u}^a)^T \nabla_X \mathbf{v}^a + (\nabla_X \mathbf{v}^a)^T \nabla_X \mathbf{u}^a \right) \quad (1.10)$$

$$\dot{\mathbf{A}}^a = \frac{1}{2} \left(\nabla_x \mathbf{v}^a + (\nabla_x \mathbf{v}^a)^T + (\nabla_x \mathbf{u}^a)^T \nabla_x \mathbf{v}^a + (\nabla_x \mathbf{v}^a)^T \nabla_x \mathbf{u}^a \right). \quad (1.11)$$

Die geometrische Linearisierung des Almansi-Euler-Verzerrungsgeschwindigkeitstensors $\dot{\mathbf{A}}$ führt auf den linearen Tensor

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\nabla_x \mathbf{v}^a + (\nabla_x \mathbf{v}^a)^T \right) \quad (1.12)$$

der Streck- bzw. Deformationsgeschwindigkeit.

Spannungen. Äußere Krafteinwirkungen führen zu einem Beanspruchungszustand im Inneren eines Körpers. Als Maß für die örtliche Beanspruchung gilt die Spannung. Das Spannungsprinzip von Euler-Cauchy postuliert für einen Körper die Existenz eines Vektorfeldes von Spannungsvektoren $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)$ an einer beliebigen Schnittfläche mit Flächennormalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$.

Der Spannungsvektor \mathbf{t} und die Flächennormale \mathbf{n} sind wie der den örtlichen Spannungszustand beschreibende Spannungstensor konfigurationsbezogene Größen. Die Konfiguration des Spannungsvektors kann von der Konfiguration der Schnittflächennormale verschieden sein. Spannungstensoren, bei denen Spannungsvektor und zugehörige Schnittflächennormale unterschiedlichen Konfigurationen angehören, werden als 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensoren \mathbf{P} bezeichnet,

$$\mathbf{t}^x = {}^x\mathbf{P}^X \cdot \mathbf{n}^X, \quad \mathbf{t}^x = {}^x\mathbf{P}^\chi \cdot \mathbf{n}^\chi, \quad \mathbf{t}^\chi = {}^\chi\mathbf{P}^X \cdot \mathbf{n}^X \quad (1.13)$$

und sind unsymmetrisch. Spannungstensoren vom 2. Piola-Kirchhoff-Typ \mathbf{S} benutzen gleiche Konfigurationen für Spannungsvektor und Flächennormale,

$$\mathbf{t}^x = {}^x\mathbf{S}^x \cdot \mathbf{n}^x, \quad \mathbf{t}^X = {}^X\mathbf{S}^X \cdot \mathbf{n}^X, \quad \mathbf{t}^\chi = {}^\chi\mathbf{S}^\chi \cdot \mathbf{n}^\chi \quad (1.14)$$

und sind daher symmetrisch. Der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor ${}^x\mathbf{S}^x$ der Momentankonfiguration \mathcal{K}^x entspricht der Definition des Spannungstensors \mathbf{T} nach Cauchy, der die wahren Spannungen beschreibt. Die Transformation zwischen den Spannungstensoren

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S} = (\det \mathbf{F})\mathbf{T}(\mathbf{F}^{-1})^T \quad (1.15)$$

gelingt mit dem Deformationsgradienten \mathbf{F} .

Mechanische Bilanzgleichungen. Bilanzgleichungen sind die mathematische Formulierung der Modellvorstellung physikalischer Prozesse in einem System und formulieren unabhängig von speziellen Eigenschaften des Kontinuums allgemeingültige Naturgesetze. Ändert sich bei einem zu untersuchenden Prozeß die Bilanzgröße nicht, besitzt die Bilanzgleichung den Charakter einer Erhaltungsgleichung.

Die zeitliche Änderung der Gesamtmasse in einem massequellfreien Kontrollvolumen ist gleich dem Massenfluß über die Oberfläche des Volumens. Die *Massebilanz* in Erhaltungform und lokaler Darstellung

$$\left. \frac{\partial \rho^\chi}{\partial t} \right|_\chi + \nabla_\chi \cdot (\rho^\chi \mathbf{v}^\epsilon) = 0 \quad \text{in } Q^\chi \quad (1.16)$$

ist im fixierten Gebiet Q^χ der Referenzkonfiguration \mathcal{K}^χ definiert. Diese auch als Kontinuitätsgleichung bezeichnete Erhaltungsgleichung bilanziert die lokale zeitliche Änderung der Dichte ρ^χ , sowie eine Dichteänderung durch Massefluß über die Oberfläche des Kontrollvolumens mit der materiellen Geschwindigkeit in Referenzform \mathbf{v}^ϵ .

Die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses in einem impulsquellfreien Kontrollvolumen ist gleich dem Impulsfluß über die Oberfläche und der Summe der auf das

Volumen von außen wirkenden Oberflächen- und Volumenkräfte. Die Erhaltungsform der *Impulsbilanz* in lokaler Darstellung

$$\left. \frac{\partial(\rho^x \mathbf{v}^a)}{\partial t} \right|_x + \nabla_x \cdot (\rho^x \mathbf{v}^a \otimes \mathbf{v}^c) - \nabla_x \cdot {}^x \mathbf{P}^x - \rho^x \mathbf{b} = 0 \quad \text{in } Q^x \quad (1.17)$$

beschreibt den spezifischen Impuls $\rho^x \mathbf{v}^a$ eines Beobachterpunktes der Referenzkonfiguration unter dem Einfluß eines Volumenkraftfeldes \mathbf{b} und seinem Spannungszustand, beschrieben mit dem 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor ${}^x \mathbf{P}^x$ in Referenzform.

Neben der Erhaltung des Impulses, gilt der *Erhalt des Drehimpulses* in einem Inertialsystem. Im Inertialsystem ist die zeitliche Änderung des Drehimpulses bei der Bewegung eines materiellen Volumens gleich dem von außen wirkenden Moment der Summe aller Oberflächen- und Volumenkräfte. Bei Beliebigkeit des Bezugspunktes für das resultierende Moment und unter Voraussetzung der Stetigkeit des Spannungsfeldes resultiert die Aussage über die Symmetrie des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors.

Die in dieser Arbeit betrachteten Kontinua sind isotrop und barotrop, zu deren Beschreibung die Energiebilanz nicht benötigt wird, da die aufgeführten Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls unter Hinzunahme noch zu definierender konstitutiver Gleichungen und Anfangs-/Randbedingungen das Systemverhalten eindeutig beschreiben.

Konstitutivgleichungen. Die kinematischen Beziehungen und die allgemeingültigen mechanischen Bilanzgleichungen für Masse und Impuls sind durch konstitutive Modellannahmen über das Materialverhalten des zu betrachtenden Kontinuums zu vervollständigen. Konstitutivgleichungen verknüpfen alle das makroskopische Kontinuumsverhalten beschreibenden phänomenologischen Variablen, wie zum Beispiel Spannungen, Verzerrungen- und Verzerrungsgeschwindigkeiten, Druck und Temperatur. Allgemeine Materialgleichungen sind nichtlinear.

Im Rahmen dieser Arbeit ist für die zu beschreibenden Kontinua die allgemeine Konstitutivgleichung

$${}^X \mathbf{S}^X = \underline{\mathbf{C}} : \mathbf{E}^a + \underline{\mathbf{D}} : \dot{\mathbf{E}}^a \quad \text{bzw.} \quad (1.18)$$

$$\mathbf{T} = \underline{\mathbf{C}} : \mathbf{A}^a + \underline{\mathbf{D}} : \dot{\mathbf{A}}^a \quad (1.19)$$

mit den energetisch konjugierten Verzerrungsmaßen für den Elastizitätstensor $\underline{\mathbf{C}}$ und den Viskositätstensor $\underline{\mathbf{D}}$ formuliert. Die allgemeine Konstitutivgleichung ist durch Beschränkung auf homogene elastische und Newtonsche Materialien vereinfachbar und ermöglicht bei Betrachtung ausschließlich isotroper Materialien die Formulierung

$${}^X \mathbf{S}^X = \lambda(\text{spur} \mathbf{E}^a) \mathbf{I} + 2\eta \mathbf{E}^a + \lambda'(\text{spur} \dot{\mathbf{E}}^a) \mathbf{I} + 2\eta' \dot{\mathbf{E}}^a \quad \text{bzw.} \quad (1.20)$$

$$\mathbf{T} = \lambda(\text{spur} \mathbf{A}^a) \mathbf{I} + 2\eta \mathbf{A}^a + \lambda'(\text{spur} \dot{\mathbf{A}}^a) \mathbf{I} + 2\eta' \dot{\mathbf{A}}^a, \quad (1.21)$$

mit unabhängigen Werkstoffkenngrößen für elastische und viskose Anteile – den mit den technisch gebräuchlichen Materialparametern Elastizitätsmodul E und Querkontraktionszahl ν beschreibbaren Lamé-Konstanten

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.22)$$

und den Koeffizienten

$$\lambda' = -\frac{2}{3}\mu \quad \text{und} \quad \eta' = \mu \quad (1.23)$$

als skalare Funktionen der dynamischen Viskosität μ unter Annahme zu vernachlässigender Druckzähigkeit (Stokessche Hypothese). Die Koeffizienten λ , η , λ' und η' repräsentieren in dieser Form lineares Materialverhalten. Im Fall materieller Nichtlinearität sind diese Koeffizienten Funktionen des aktuellen Spannungszustandes.

Festkörper. Für Saint-Venant-Kirchhoff-Material gilt die Annahme langsamer Deformation mit sehr kleinen Verzerrungsgeschwindigkeiten. Der Spannungszustand

$${}^X\mathbf{S}^X = \lambda(\text{spur}\mathbf{E}^a)\mathbf{I} + 2\eta\mathbf{E}^a \quad (1.24)$$

ist mit den materiellen Verschiebungsableitungen verknüpft. Wenn die Laméschen Konstanten zeitinvariant sind, kann die konstitutive Beziehung in Ratenform angegeben werden

$$\underline{\mathbf{C}}^{-1} : {}^X\mathbf{S}^X - \dot{\mathbf{E}}^a = \mathbf{0}. \quad (1.25)$$

Fluide. Schubverzerrungen verursachen bei Fluiden aufgrund eines vernachlässigbar kleinen Schubmoduls η nur geringe Schubspannungen. Die zeitliche Änderung der Schubverzerrungen hat dagegen große Schubspannungen zur Folge. Die Bedingung für den hydrostatischen Spannungszustand $\lambda(\text{spur}\mathbf{A}^a)\mathbf{I} = -p^x$ mit dem Druck p^x der Momentankonfiguration führt für inkompressible Fluide ($\text{spur}\dot{\mathbf{A}}^a = 0$) auf

$$\mathbf{T} = 2\mu\dot{\mathbf{A}}^a - p^x\mathbf{I} \approx 2\mu\mathbf{D} - p^x\mathbf{I} \quad (1.26)$$

als schließende Konstitutivgleichung.

Anfangs- und Randbedingungen. Für das System partieller Differentialgleichungen bestehend aus Massebilanz (1.16), Impulsbilanz (1.17) und Konstitutivgleichung (1.18) bzw. (1.19) sind zur Formulierung der vollständigen Aufgabenstellung Anfangs- und Randbedingungen vorzugeben.

Als Anfangsbedingung sind für jeden Punkt der Referenzkonfiguration zum Anfangszeitpunkt t_a die Vektorfelder der Verschiebung und des Impulses

$$\mathbf{u}^a(t_a) = \mathbf{0} \quad \text{in} \quad \Omega^x \quad (1.27)$$

$$\rho^x(t_a)\mathbf{v}^a(t_a) - \rho_a^x\mathbf{v}_a^a = \mathbf{0} \quad \text{in} \quad \Omega^x \quad (1.28)$$

konsistent bezüglich der Massenerhaltung festzulegen.

Auf dem Rand P^χ des Gebietes des Raum-Zeit-Kontinuums in der Referenzkonfiguration \mathcal{K}^χ mit

$$P^\chi = P_D^\chi \cup P_N^\chi \quad P_D^\chi \cap P_N^\chi = \emptyset \quad (1.29)$$

gelten Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingungen in lokaler Form

$$\rho^\chi \mathbf{v}^a - \bar{\rho}^\chi \bar{\mathbf{v}}^a = \mathbf{0} \quad \text{auf } P_D^\chi \quad (1.30)$$

$$\mathbf{t}^\chi - \bar{\mathbf{t}}^\chi = \mathbf{0} \quad \text{auf } P_N^\chi \quad (1.31)$$

mit den Masseflüssen $\bar{\rho}^\chi \bar{\mathbf{v}}^a$ über den Rand und den eingprägten Randspannungen $\bar{\mathbf{t}}^\chi$ in der Referenzkonfiguration.

Übergangsbedingungen. Auf dem deckungsgleichen Raum-Zeit-Rand zweier Kontinua

$$R = Q_1 \cap Q_2 \quad (1.32)$$

findet ein Austausch physikalischer Informationen statt. Die Kontinua sind auf diesem gemeinsamen Rand miteinander gekoppelt. Die Art und Weise der Wechselwirkung der Teilsysteme ist durch die Bilanz von Masse und Impuls auf dem Kopplungsrand bestimmt.

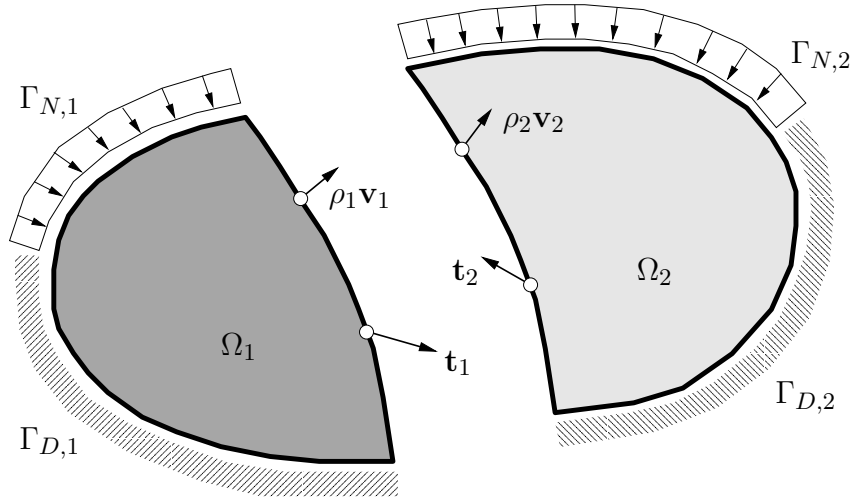


Bild 1.3: Schnittsituation mit Rand- und Übergangsbedingungen.

Auf der zeitlich veränderlichen und permeablen Kopplungsfläche R^χ zweier Raum-Zeit-Kontinua in der Referenzkonfiguration \mathcal{K}^χ findet der Austausch von Materie massenerhaltend statt. Die Masse, die effektiv von einem Kontinuum über den Kopplungsrand

in das zweite Kontinuum fließt, bleibt unverändert. Für den Massefluß an jedem Punkt des Interfaces gilt daher

$$\rho^\chi \mathbf{v}_1^a - \rho^\chi \mathbf{v}_2^a = \mathbf{0} \quad \text{auf} \quad R^\chi. \quad (1.33)$$

Bei der Betrachtung unmischbarer Kontinua, d.h. unter Ausschluß von Massetransfer über die gemeinsame Grenzfläche, sind die Geschwindigkeiten \mathbf{v}_1^a und \mathbf{v}_2^a am Kopplungsrand gleich, was einer geometrischen Übergangsbedingungen entspricht

Der Spannungszustand erfüllt am Interface die Gleichgewichtsbedingungen. Die Übergangsbedingung (Rankine-Hugoniot-Bedingung)

$$\mathbf{t}_1^\chi + \mathbf{t}_2^\chi - \mathbf{N}^T \check{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \quad \text{auf} \quad R^\chi \quad (1.34)$$

beschreibt die Impulserhaltung am Kopplungsrand, worin der Vektor $\check{\mathbf{t}}$ die modellabhängige Änderung der Randspannungskomponenten am Interface erfaßt. Dazu gehören unter anderem der Einfluß von Reibung und Oberflächenspannung. Die Basis $\mathbf{N}^T = (\mathbf{n}^\chi, \mathbf{s}_1^\chi, \mathbf{s}_2^\chi)$ an einem beliebigen Punkt der Grenzfläche R ist mit den Einheitsvektoren in Normal- und Tangentialrichtung an das Interface gegeben.

Übergang zu Beschreibungsweisen nach Lagrange und Euler. Im bisherigen Vorgehen sind sämtliche kontinuumsmechanischen Beschreibungsgrößen bezüglich der Referenzkonfiguration \mathcal{K}^χ eines festen Beobachters angegeben. Der Übergang von dieser Sichtweise zu den Formulierungen nach Lagrange bzw. Euler erfolgt durch Verschiebung der Referenzkonfiguration auf die Material- bzw. die Momentankonfiguration. In der klassischen Lagrangeschen Formulierung geht die stationäre Beobachterkonfiguration \mathcal{K}^χ in die materielle Konfiguration \mathcal{K}^X über. Fallen Referenzkonfiguration \mathcal{K}^χ und Momentankonfiguration \mathcal{K}^x zusammen, liegt die Euler-Betrachtungsweise vor. Die beigefügten Tabellen 1.1 und 1.2 stellen die Äquivalente der wichtigsten Größen und Ableitungen für die Betrachtungsweisen nach Lagrange und Euler zusammen.

\mathcal{K}^χ	Q^χ	P^χ	\mathbf{b}	\mathbf{c}	\mathbf{v}^b	\mathbf{v}^c	\mathbf{F}^b	\mathbf{F}^c	\mathbf{E}^b	\mathbf{E}^c	ρ^χ	\mathbf{t}^χ	∇_χ	$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right _\chi$	${}^x \mathbf{P}^\chi$
\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow
\mathcal{K}^X	Q^X	P^X	\mathbf{a}	\mathbf{I}	\mathbf{v}^a	$\mathbf{0}$	\mathbf{F}^a	$\mathbf{0}$	\mathbf{E}^a	$\mathbf{0}$	ρ^X	\mathbf{t}^X	∇_X	$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right _X$	${}^x \mathbf{P}^X$

Tabelle 1.1: Spezialisierung zur Beschreibungsweise von Lagrange

\mathcal{K}^χ	Q^χ	P^χ	\mathbf{b}	\mathbf{c}	\mathbf{v}^b	\mathbf{v}^c	\mathbf{F}^b	\mathbf{F}^c	\mathbf{E}^b	\mathbf{E}^c	ρ^χ	\mathbf{t}^χ	∇_χ	$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right _\chi$	${}^x \mathbf{P}^\chi$
\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow
\mathcal{K}^x	Q^x	P^x	\mathbf{I}	\mathbf{a}	$\mathbf{0}$	\mathbf{v}^a	$\mathbf{0}$	\mathbf{F}^a	$\mathbf{0}$	\mathbf{E}^a	ρ^x	\mathbf{t}^x	∇_x	$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right _x$	\mathbf{T}

Tabelle 1.2: Spezialisierung zur Beschreibungsweise von Euler

Bei der Betrachtung spezieller Kontinua in Kapitel 4 und Kapitel 5 ist mit Hilfe dieser Vorschriften die Darstellung von Strömungen in der Betrachtungsweise von Euler und die Beschreibung von Festkörpern in der Lagrangeschen Formulierung realisiert. Die Grundgleichungen in Referenzform sind als universeller Ansatz zur Formulierung eines allgemeinen numerischen Lösungsverfahrens für eine Vielzahl kontinuumsmechanischer Aufgabenstellungen geeignet.

1.3 Gewichtete Residuen

Die Verwendung von Näherungsansätzen für den Verlauf der Zustandsgrößen im Gebiet bewirkt eine fehlerbehaftete Erfüllung der Modellgleichungen. Die Reduktion des von den Freiwerten des Näherungsansatzes abhängigen Residuums gelingt durch die Wahl geeigneter Wichtungsfunktionen, für die Orthogonalität zu allen Residuen gefordert wird. Auf die lokale Form der Bilanzgleichungen (1.16) und (1.17) beider Kontinua in Q_1 und Q_2 , der Anfangsbedingung (1.28), sowie der Randbedingungen (1.30)-(1.31) und Übergangsbedingungen (1.33)-(1.34) wird die Methode der gewichteten Residuen mit einer Wichtung nach Galerkin angewendet [9]. Nach partieller Integration des Spannungsterms der Impulsbilanz liegt die schwache Form der Aufgabenstellung mit den primalen Beschreibungsgrößen Dichte, Geschwindigkeit und Randspannungen in der Referenzkonfiguration vor.

Die in Gleichung (1.35) aufgeführte schwache Form verlangt die exakte Erfüllung der Kinematik und der Konstitutivgleichung. Alternativ können diese nach dem allgemeinen Variationsprinzip von Hu-Washizu [44] zusätzlich schwach formuliert werden, was zu weiteren Unbekannten führt.

In Gleichung (1.35) zeigt Zeile (a) die Massebilanzgleichung (1.16) nach einheitenkonformer Petrov-Galerkin-Wichtung, die in dieser integralen Form die Erhaltung der globalen Masse des Systems sichert. Die Zeilen (b) und (c) zeigen die schwache Form der Impulsbilanzgleichung (1.17) nach Bubnov-Galerkin-Wichtung und partieller Integration des Spannungsterms. In Zeile (d) folgt die Integralform der Anfangsbedingung (1.28). Die Randbedingung (1.30) auf dem Dirichlet-Rand geht in den ersten Term aus Zeile (e) ein und ist in integraler Form erfüllt. Der zweite Term resultiert aus der partiellen Integration der Impulsbilanz und ermöglicht die Bestimmung des Spannungszustandes auf dem Dirichlet-Rand. Einen durch (1.31) auf dem Neumann-Rand festgesetzten Randspannungszustand berücksichtigt Zeile (f). Die in (1.33) formulierte Übergangsbedingung für den Massefluß über die gemeinsame Grenzfläche R der Kontinua geht mit Zeile (g) gewichtet ein. Zeile (h) beinhaltet die verbleibenden Terme der Übergangsbedingung (1.34) für die Interfacespannungen nach partieller Integration

der Impulsbilanzen.

$$\sum_{i=1}^2 \int_{Q_i^\chi} \delta(\rho_i^\chi \mathbf{v}_i^a \cdot \mathbf{v}_i^a) \left(\frac{\partial \rho_i^\chi}{\partial t} \Big|_\chi + \nabla_\chi \cdot (\rho_i^\chi \mathbf{v}_i^c) \right) dQ^\chi \quad (1.35a)$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \int_{Q_i^\chi} \delta(\rho_i^\chi \mathbf{v}_i^a) \cdot \left(\frac{\partial(\rho_i^\chi \mathbf{v}_i^a)}{\partial t} \Big|_\chi + \nabla_\chi \cdot (\rho_i^\chi \mathbf{v}_i^a \otimes \mathbf{v}_i^c) - \rho_i^\chi \mathbf{b}_i \right) dQ^\chi \quad (1.35b)$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \int_{Q_i^\chi} \delta(\nabla_\chi \cdot \rho_i^\chi \mathbf{v}_i^a) : {}^x \mathbf{P}^\chi dQ^\chi \quad (1.35c)$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega^\chi} \delta(\rho_i^\chi \mathbf{v}_i^a(t_a)) \cdot (\rho_i^\chi \mathbf{v}_i^a(t_a) - \rho_i^\chi \mathbf{v}_{i,a}^a) d\Omega^\chi \quad (1.35d)$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \int_{P_{D,i}^\chi} \delta \mathbf{t}_i^\chi \cdot (\rho^\chi \mathbf{v}_i^a - \bar{\rho}^\chi \bar{\mathbf{v}}_i^a) dP^\chi - \sum_{i=1}^2 \int_{P_{D,i}^\chi} \delta(\rho_i^\chi \mathbf{v}_i^a) \cdot \mathbf{t}_i^\chi dP^\chi \quad (1.35e)$$

$$- \sum_{i=1}^2 \int_{P_{N,i}^\chi} \delta(\rho_i^\chi \mathbf{v}_i^a) \cdot \bar{\mathbf{t}}_i^\chi dP^\chi \quad (1.35f)$$

$$+ \int_{R^\chi} \delta \mathbf{t}_1^\chi \cdot (\rho^\chi \mathbf{v}_1^a - \rho^\chi \mathbf{v}_2^a) dR^\chi \quad (1.35g)$$

$$- \int_{R^\chi} \delta(\rho_1^\chi \mathbf{v}_1^a) \cdot \mathbf{t}_1^\chi dR^\chi + \int_{R^\chi} \delta(\rho_2^\chi \mathbf{v}_2^a) \cdot (\mathbf{t}_1^\chi - \mathbf{N}^T \check{\mathbf{t}}) dR^\chi \quad (1.35h)$$

$$= 0 \quad \forall \delta \rho_i^\chi, \delta \mathbf{v}_i^a, \delta \mathbf{t}_i^\chi$$

Die hier gewählte Formulierung ist Basis für die in Kapitel 4 und Kapitel 5 vorzunehmende Spezialisierung auf linear elastische Festkörper in Lagrangescher Betrachtung und inkompressible reibungsbehaftete Zwei-Fluid-Strömungen in Eulerscher Betrachtungsweise.

1.4 Lösungsverfahren - Raum-Zeit-Finite-Element-Methode

Die Diskretisierung der vollständig definierten physikalischen Aufgabe in schwacher Form erfolgt mit der Raum-Zeit-Finite-Element-Methode. Die einheitliche Diskretisierung von Raum und Zeit mit finiten Elementen geht auf Oden [68], Argyris [4] und Fried [35] zurück.

Approximation physikalischer Größen. Im Gebiet Q und auf dem Rand P wird die geordnete Menge \mathcal{N}^{std} der Knoten k eingeführt. Die gewöhnliche Basis der Raum-Zeit-Finite-Element-Approximation

$$\mathcal{V}_{\text{std}} = \bigcup_{k \in \mathcal{N}^{\text{std}}} N_k(\boldsymbol{\chi}, t) \quad (1.36)$$

wird aus den knotenweise definierten Ansatzfunktionen N_k gebildet, die kompakte Träger besitzen und stückweise stetig differenzierbar sind. Der Ansatzraum \mathcal{V}_{std} spannt den Funktionenraum abschnittsweise stetiger Polynome einer festgelegten Ordnung auf. Die Approximation u_{std}^h des raumzeitlichen Verlaufs der Beschreibungsvariablen u ist durch Linearkombination der Ansatzfunktionen

$$u_{\text{std}}^h(\boldsymbol{\chi}, t) = \sum_{k \in \mathcal{N}^{\text{std}}} N_k(\boldsymbol{\chi}, t) \hat{u}_k \quad (1.37)$$

in Raum und Zeit formuliert. Der Ansatz beinhaltet die unbekannten Koeffizienten \hat{u}_k , die durch das numerische Lösungsverfahren zu bestimmen sind.

Die schwache Form (1.35) der Modellgleichungen umfaßt das gesamte zu betrachtende Zeitintervall $I = \{t \mid t_a < t < t_e\}$. Es ist zweckmäßig, das Zeitintervall I in eine Sequenz von Zeitintervallen $I_n = \{t \mid t_n < t < t_{n+1}\}$ unter Einführung diskreter Zeitpunkte t_n zu unterteilen. Die Auswertung von (1.35) erfolgt dann sequenziell für jedes Zeitintervall - die Zeitscheibe Q_n .

Zeitdiskontinuierliches Galerkin-Verfahren. Während die räumlichen Ansatzfunktionen für die Beschreibungsgrößen kontinuierlich gewählt sind, kommen in Zeitrichtung an den Intervallgrenzen diskontinuierliche Ansätze zum Einsatz, siehe Bild 1.4. Diese Herangehensweise führt auf ein zeitdiskontinuierliches Galerkin-Verfahren [51]. Im Gegensatz zum zeitkontinuierlichen Galerkin-Verfahren erhöht sich die Anzahl der zu bestimmenden Unbekannten um die Freiwerte am Anfang des betrachteten Zeitintervalls. Das zeitdiskontinuierliche Galerkin-Verfahren ist ein implizites Zeitintegrationsverfahren, daß für die vorliegenden Differentialgleichungen erster Ordnung mit linearen Zeitansätzen A-stabil ist [51] und die Genauigkeitsordnung $O(\Delta t^3)$ besitzt. Hübner vergleicht in [45] das zeitdiskontinuierliche Galerkin-Verfahren mit der Methode nach Newmark und untersucht Genauigkeits- und Filtereigenschaften dieser Ansätze.

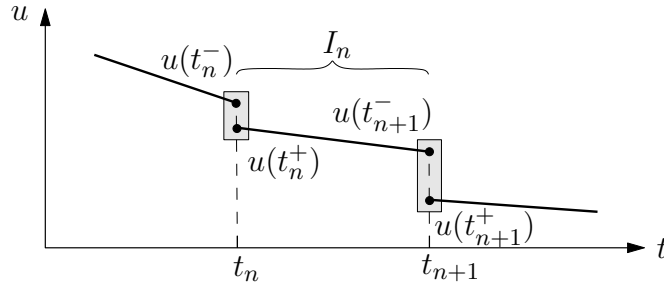


Bild 1.4: Zeitverlauf der Zustandsgröße $u(t)$ mit linearen diskontinuierlichen Ansätzen.

Die Bedingungen für den Übergang der physikalischen Zustandsgrößen an den Intervallgrenzen sind aus Erhaltungssätzen abzuleiten. Für jedes Zeitintervall ist daher die Anfangsbedingung (1.28) in gewichteter Form

$$+ \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega^x} \delta(\rho_i^x(t_n^+) \mathbf{v}_i^a(t_n^+)) \cdot (\rho_i^x(t_n^+) \mathbf{v}_i^a(t_n^+) - \rho_i^x(t_n^-) \mathbf{v}_i^a(t_n^-)) \, d\Omega^x \quad (1.38a)$$

in die Integralgleichung einzubringen, um die integrale Erhaltung des Impulses an den Zeitscheibenübergängen zu gewährleisten.

Approximation des Raum-Zeit-Gebietes. Zur effizienten numerischen Bestimmung der Integralausdrücke in der Variationsformulierung ist die Diskretisierung der Raum-Zeit-Scheibe Q_n mit finiten Elementen geeignet. Diese Approximation der Kontinuumsgeometrie erlaubt darüberhinaus die Bestimmung aller Ableitungen der Zustandsgrößen nach Raum- und Zeitkoordinaten. Bild 1.5 zeigt schematisch die Diskretisierung des Raum-Zeit-Kontinuums Q mit finiten Raum-Zeit Elementen und die Unterteilung des Zeitbereichs in sequentiell abzuarbeitende Zeitscheiben Q_n .

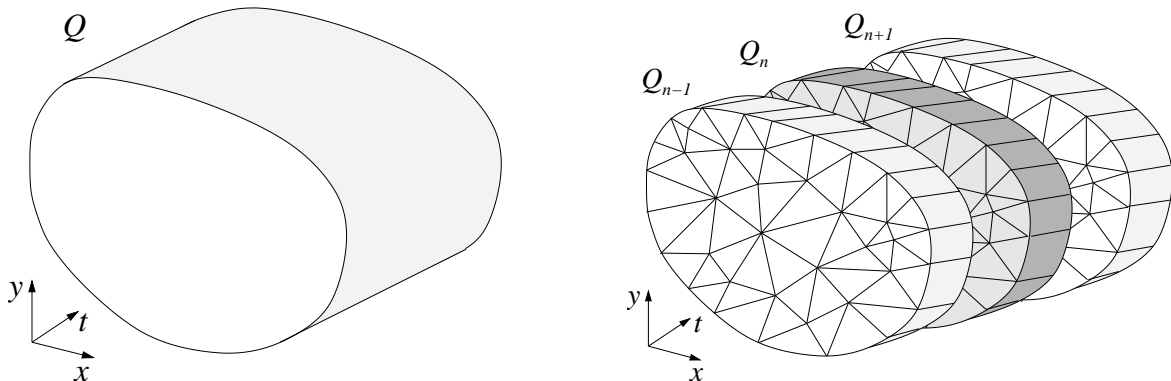


Bild 1.5: Diskretisierung des raumzeitlichen Gebietes mit finiten Raum-Zeit Elementen

6-Knoten-Raum-Zeit-Prismen-Element. In weiten Teilen dieser Arbeit kommt ein Raum-Zeit-Element-Typ zum Einsatz, der den zwei-dimensionalen Raum dreieckförmig diskretisiert und somit die Verwendung leistungsfähiger Triangulierungsalgorithmen [88] zur Erzeugung eines geeigneten Berechnungsnetzes erlaubt. Die räumliche Dreiecksform des Elementes ist in Zeitrichtung beibehalten und führt mit linearer Interpolation der Raum-Zeit-Koordinaten auf das prismatische 6-Knoten-Element. Das Koordinatensystem des Raumes ist hierbei als stets orthogonal zur globalen Zeitachse t vereinbart. Die globale Zeitkoordinate ist damit ausschließlich eine Funktion der elementlokalen Koordinate der Zeit. Die lokalen Raumkoordinaten (z_1, z_2, z_3) und die lokale Zeitkoordinate τ des Prismen-Elementes sind in Bild 1.6 dargestellt.

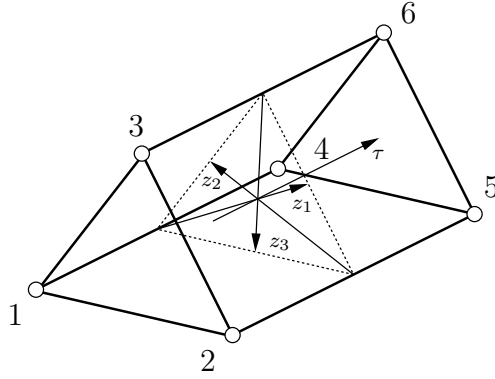


Bild 1.6: 6-Knoten-Raum-Zeit-Prismen-Element.

Die Approximation der Elementgeometrie in Raum und Zeit verwendet lineare Lagrange-Polynome in einem Produktansatz, so daß mit

$$\begin{bmatrix} \chi_1(z_1, z_2, z_3, \tau) \\ \chi_2(z_1, z_2, z_3, \tau) \\ t(\tau) \end{bmatrix}_e = \sum_{k=1}^6 M_k(z_1, z_2, z_3, \tau) \begin{bmatrix} \hat{\chi}_1 \\ \hat{\chi}_2 \\ \hat{t} \end{bmatrix}_k \quad (1.39)$$

die Interpolation der Raum-Zeit-Koordinaten im Element mit den jeweils 6 Knotenwerten der globalen Koordinaten $\hat{\chi}_{jk}$ und \hat{t}_k gelingt. Die Formfunktionen M_k für prismatische Körper können der Standardliteratur für Finite-Element-Verfahren, z.B. [108], entnommen werden. Das 6-Knoten-Raum-Zeit-Element ist als isoparametrisch zu bezeichnen, wenn die Ansatzfunktionen N_k zur Interpolation physikalischer Größen mit den Formfunktionen M_k des Geometrieansatzes übereinstimmen. Im Element gilt dann für die Größe u der Ansatz

$$u_e^h(z_1, z_2, z_3, \tau) = \sum_{k=1}^6 N_k(z_1, z_2, z_3, \tau) \hat{u}_k, \quad (1.40)$$

der die Knotenwerte \hat{u}_k als Freiwerte des Ansatzes beinhaltet. Die Bestimmung der diskreten Ableitung von u im Element erfolgt durch Differentiation der Formfunktionen nach den globalen Raum- und Zeit-Koordinaten.

Zeitveränderliche Gebiete. Ein wesentlicher Vorteil raum-zeit-finiten Elemente ist die Möglichkeit, zeitliche Lageänderungen der Gebietsränder durch Anpassung der Elementgeometrie effizient bei der Lösung der Modellgleichungen berücksichtigen zu können. Für moderate Deformationen des Gebietsrandes existieren eine Reihe leistungsfähiger Verfahren zur Bewegung des Berechnungsnetzes, wie zum Beispiel der von Walhorn [106] diskutierte Pseudo-Struktur-Ansatz. Weiterreichende Verformungen des Berechnungsgebietes erfordern in der Regel eine Neuvernetzung. Eine gänzlich andere Herangehensweise stellt die Lösung der Bestimmungsgleichungen auf topologisch fixierten Gittern dar. Hierbei bleibt die Gebietsdiskretisierung in der gesamten Berechnung unverändert, während bewegliche Grenzflächen und Ränder durch zusätzliche Hilfsgrößen, wie Markerpartikel oder skalarwertige Funktionen, beschrieben sind.

Stabilisierung. In (1.35) erfolgt die Wichtung der Residuen der Bestimmungsgleichungen nach dem Verfahren von Bubnov-Galerkin mit der ersten Variation der Ansätze. Diese Wahl der Wichtungsfunktion im Rahmen der Methode der gewichteten Reste resultiert in einer symmetrischen Integralformulierung und hat sich bei der Lösung elliptischer Differentialgleichungen bewährt. Die Anwendung auf hyperbolische Aufgabenstellungen führt unter Umständen zu oszillationsbehafteten und unphysikalischen Lösungen, wenn die Wichtungsfunktionen die Richtung der Informationsausbreitung nicht hinreichend berücksichtigen. Mit einer Petrov-Galerkin-Wichtung können numerisch instabile Lösungen in dieser Hinsicht vermieden werden. Im Rahmen der Finite-Element-Methode ist mit der von Brooks und Hughes [18] physikalisch motivierten Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin-Methode eine stabile Lösung konvektionsdominierter Aufgaben durch geeignete Wahl der Wichtungsfunktionen gelungen. Der in dieser Arbeit eingesetzte Galerkin/Least-Squares-Ansatz [48, 87] zur Stabilisierung der Modellgleichungen fügt der Bubnov-Galerkin-Form Fehlerquadratanteile der Residuen hinzu und verbessert auf diese Weise die Stabilität des Verfahrens ohne seine Konsistenz zu beeinflussen.

Das Einführen von Nebenbedingungen in die Integralgleichung mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren resultiert in einer gemischten Formulierung. Der Einsatz der Finite-Element-Methode für gemischte Formulierungen erfordert eine Abstimmung der Ansätze für die Beschreibungsgröße und den Lagrange-Multiplikator. Treten Beschreibungsvariable und Lagrange-Multiplikator mit unterschiedlichen Ableitungsordnungen auf, führen identische Ansatzordnungen bei Bubnov-Galerkin-Wichtung zu numerisch instabilen Lösungen. Die auftretenden künstlichen Oszillationen und Versteifungseffekte sind durch Erfüllung der Babuška-Brezzi-Bedingung [5, 17] vermeidbar. Die Einführung modifizierter Wichtungsfunktionen führt auf ein stabiles Petrov-Galerkin-Verfahren für das der Nachweis der Babuška-Brezzi-Bedingung nicht notwendig ist und stabile Lösungen für beliebige Ansatzordnungskombinationen gewährleistet sind.

Die Einführung der oben erwähnten Galerkin/Least-Squares-Stabilisierung hat genau diese Wirkung und wird hier zur Erzielung numerisch stabiler Lösungen für gemischte Formulierungen eingesetzt [48, 39]. Sämtliche Anteile der Stabilisierung sind mit dem Stabilisierungsparameter τ gewichtet. Die Bestimmung geeigneter Werte für τ hat Einfluß auf die Genauigkeit der erzielten Lösung und ist Gegenstand einer Fülle von Forschungsarbeiten [102, 10, 62, 38].

2. Zeitveränderliche Gebiete und Fronten

2.1 Anforderungen und Überblick

Neben den Modellgleichungen einer physikalischen Aufgabenstellung mit Rand- und Anfangsbedingungen ist die Geometrie des zu betrachtenden Gebietes eindeutig zu beschreiben. Diese Aufgabe ist gerade dann von besonderer Wichtigkeit, wenn die Lage der Gebietsränder zeitabhängig und eine Funktion des physikalischen Zustandes im Gebiet ist, wie im Fall von Fluidströmungen mit freier Grenzfläche. Desweiteren kann die Lage der Gebietsgrenze abhängig von der Lösung weiterer Modellgleichungen (z.B. Wärmeleitung mit Gebietsrand als Wärmequelle) oder ihren geometrischen Eigenschaften (Krümmung, Normale) sein. Bild 2.1 zeigt verschiedene Grenzflächentypen. Geschlossene Grenzflächen trennen Gebiete voneinander ab und definieren den gemeinsamen Rand. Offene Grenzflächen repräsentieren die Lage von Singularitäten in einem Gebiet.

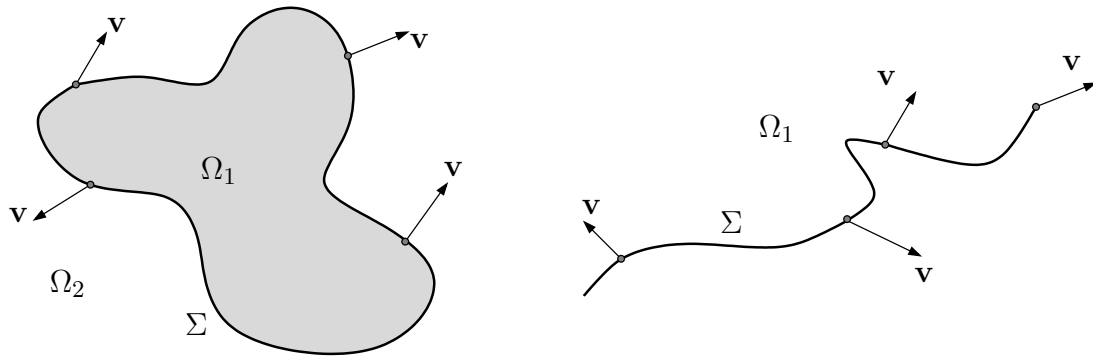


Bild 2.1: Geschlossene (links) und offene (rechts) Grenzfläche bzw. Front.

Die Bewegung eines materiellen Punktes \mathbf{x} auf der Grenzfläche R unterliegt der an diesem Punkt definierten Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ der Grenzfläche. Die Lageänderung $d\mathbf{x}$ eines Punktes auf der Grenzfläche ist mit

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

beschrieben. Gleichung (2.1) beschreibt für alle Punkte der Grenzfläche R die translatorischen und rotatorischen Änderungen sowie die Verformungen der Gebietsgrenzen

und schließt die Möglichkeit topologischer Änderungen der Grenzfläche ein, die Bild 2.2 veranschaulicht.

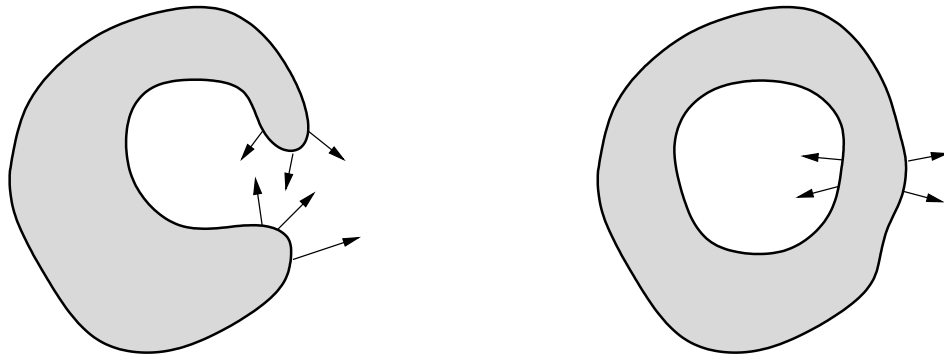


Bild 2.2: Lage- und Gestaltänderung einer Grenzfläche.

Approximation. Die Grenzfläche R besteht aus unendlich vielen Punkten. Um die Grenzfläche und ihre Bewegung einer numerischen Beschreibung zugänglich zu machen, ist sie mit einer endlichen Anzahl von Beschreibungsvariablen zu approximieren. Eine Kurve in zwei Raumdimensionen kann mit stückweise definierten Kurvensegmenten angenähert und eine dreidimensionale Fläche mit Hilfe von Dreiecken diskret beschrieben werden. Hierbei ist der verfahrensabhängige Approximationsfehler bei der Wahl eines geeigneten Näherungsansatzes für spezielle Aufgaben zu berücksichtigen. Für die Wahl des Verfahrens ist weiterhin der Grad der zu erwartenden Formänderung der Grenzfläche entscheidend. Ändert die Grenzfläche während der Bewegung ihre Gestalt, kann eine parametrisierende Erfassung schnell hohe Komplexität erreichen und algorithmisch kaum mehr realisierbar sein. Unterliegt die Grenzfläche jedoch vorwiegend Starrkörperbewegungen und moderaten Deformationen, ist diese Beschreibungsform hinsichtlich ihrer Genauigkeit und Flexibilität anderen Verfahren vorzuziehen.

Die Anforderungsschwerpunkte an das Verfahren zur Gebiets- bzw. Grenzflächenbeschreibung sind durch die zugrundeliegende physikalische Aufgabenstellung definiert. Für einige Problemstellungen ist die alleinige Verfolgung einer Grenzfläche notwendig (z.B. zur Erfassung singulärer Quellen im Gebiet), bei anderen Aufgaben ist neben einer gebietstrennenden Grenzfläche auch die Identifikation der Gebiete zu gewährleisten (z.B. Mehrfeldsysteme). Die variierenden Anforderungsprofile an die Verfahren haben zu sehr unterschiedlichen Ansätzen geführt. Eine mögliche erste Kategorisierung dieser Verfahren [90] erfolgt im Allgemeinen durch die Unterscheidung in Grenzflächen- (front tracking) und Gebietsverfolgung (volume tracking).

Front Tracking. Diese Verfahren realisieren ausschließlich die Darstellung einer Grenzfläche und deren Bewegung mit den lokal vorhandenen Grenzflächengeschwindigkeiten. Front-Tracking-Methoden stellen die Grenzfläche als Folge polynomialer Kurvenseg-

mente mit einer endlichen Menge von Stützpunkten dar. Während die Konnektivität der Stützpunkte, d.h. die Topologie der Grenzfläche, unverändert bleibt, wird ihre Lageänderung durch Lösung der Bewegungsgleichung (2.1) in Lagrangescher Form ermittelt. Sämtliche geometrischen Eigenschaften (Lage, Normale, Krümmung) sind somit zu jedem Zeitpunkt in expliziter Form verfügbar. Wird auf die Konnektivität der Stützpunkte verzichtet und werden nur charakteristische Punkte auf der Grenzfläche bewegt, so ist keine topologische Information vorhanden, die mit geeigneten Algorithmen zu rekonstruieren ist. Eine Auswahl von Front-Tracking-Ansätzen zeigt Bild 2.3.

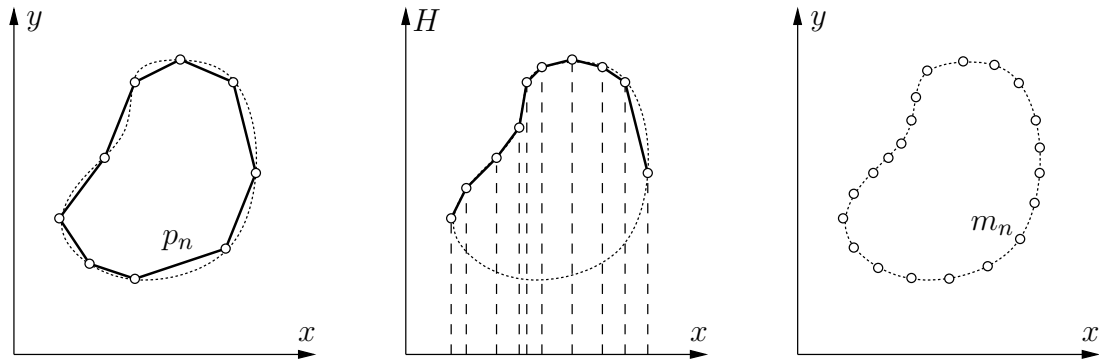


Bild 2.3: Front Tracking: Segmente, Höhenfunktion und nichtkonnektierte Punkte.

Volume Tracking. Im Gegensatz zu Front-Tracking-Methoden, erfassen Verfahren der Kategorie Volume Tracking ein oder mehrere Gebiete und beschreiben deren Lageänderung. Parametrisierende Verfahren, die die zu betrachtenden Gebiete mit einfachen geometrischen Objekten diskretisieren (Bild 2.4), sind für Bereiche ohne topologische Änderungen geeignet und mit hoher Genauigkeit bei der Lösung der Bewegungsgleichung (2.1) verbunden. Die Zuordnung der diskreten Primitiva zu den zu unterscheidenden Gebieten Q_1 und Q_2 bleibt zu jedem Zeitpunkt erhalten.

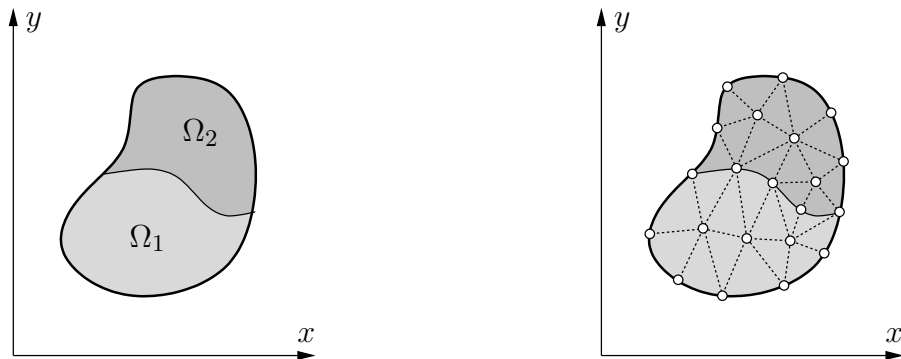


Bild 2.4: Volume Tracking: Die Teilgebiete sind vollständig parametrisiert.

Bei starken Deformationen der Teilgebiete können die eingesetzten geometrischen Primitiva entarten, so daß aufwendige Neuvernetzungen notwendig sind. Hierfür existieren Verfahren, die eine parametrische Beschreibung des Berechnungsgebietes verwenden und zur Identifikation der bewegten Teilgebiete Q_1 und Q_2 zusätzliche Hilfsgrößen (Bild 2.5) einsetzen, die leistungsfähig Gestaltänderungen von Gebieten und Fronten abbilden. Mit Partikel-Verfahren gelingt die Abbildung von Strukturen der trennenden Grenzfläche, die unterhalb der Skala des zugrundeliegenden Netzes liegen.

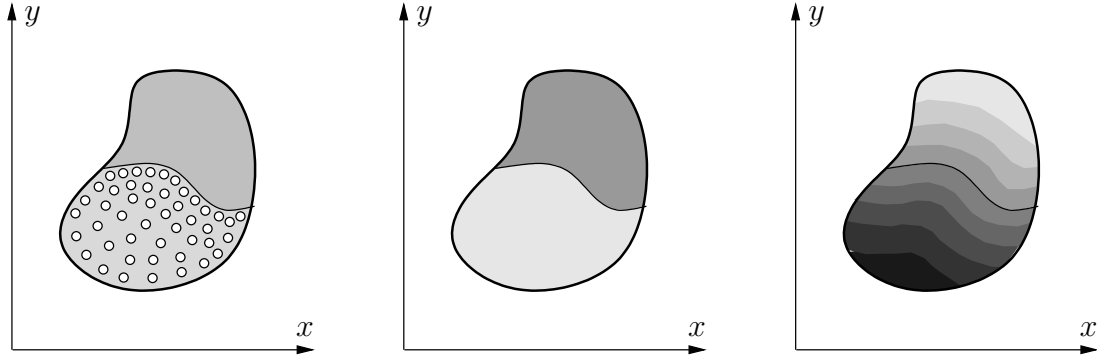


Bild 2.5: Volume Tracking: Transport diskreter Marker-Partikel & skalarer Funktionen.

2.1.1 Explizite Beschreibungsformen

Verfahren, die die zu betrachtenden Gebiete bzw. Fronten in parametrischer Form darstellen, gehören zur Kategorie der expliziten Gebietsbeschreibungen. Jedes Teilgebiet Q_i komplexer Geometrie ist mit Hilfe von Stützpunkten (Knoten) als Menge geometrischer Primitiva T_m beschrieben

$$Q_i = \bigcup_{m=1}^M T_m. \quad (2.2)$$

Die Menge aller diskreten Punkte $R_{1,2}^m = Q_1^m \cap Q_2^m$ der Grenzfläche ist identisch mit der Schnittmenge der angrenzenden Primitiva.

Die Parametrisierung der Teilgebiete Q_i kann unabhängig von der Situation auf gemeinsamen Rändern $R_{1,2}^m$ durchgeführt werden, was im Allgemeinen zu nicht randkonformen Diskretisierungen der Gebiete Q_1^m und Q_2^m führt (Bild 2.6). Eine randkonforme Diskretisierung gewährleistet die übereinstimmende Approximationsgüte der Grenzfläche R und verhindert Klaffungen und Überschneidungen der Teilgebiete bei der Bewegung des gemeinsamen Randes.

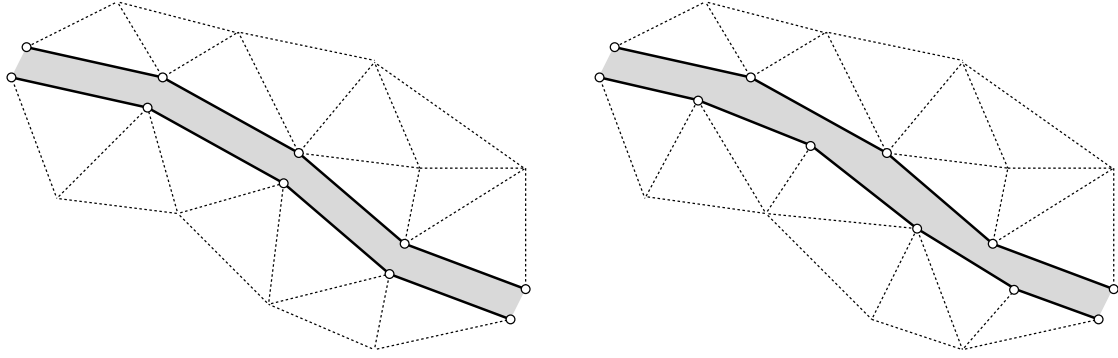


Bild 2.6: explizite Gebietsbeschreibung: randkonform und nicht randkonform.

Die Lageänderung $d\mathbf{x}$ eines materiellen Punktes \mathbf{x} im Gebiet bzw. auf der Grenzfläche wird mit (2.1) ermittelt. Die explizite Form der Gebietserfassung und -evolution ist in der Lage, komplexe Geometrien effizient abzubilden, solange Gestaltänderungen der Bereiche ausbleiben. Ist die Deformation des Gebietes erheblich und lokalen großen Formänderungen unterworfen, kann die vorhandene Approximationsgüte nicht mehr hinreichend sein und eine teilweise Neuvernetzung der betroffenen Teilgebiete erforderlich machen. Dies ist insbesondere der Fall, wenn topologische Änderungen stattfinden, wie in Bild 2.7 schematisch gezeigt.

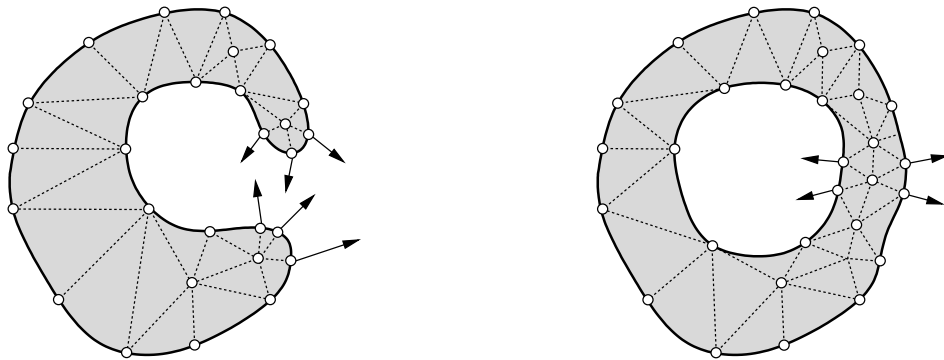


Bild 2.7: Neuvernetzung bei Topologieänderung.

Neben dem erforderlichen Zeitaufwand zur Erstellung eines geeigneten neuen Netzes (Re-Meshing), ist der mit der notwendigen Lösungsprojektion zwischen den Diskretisierungen verbundene Fehler zu berücksichtigen. Ein Vorteil der mitgeführten Diskretisierung ist die stets in expliziter Form vorliegende Beschreibung der Ränder und Grenzflächen. Dieser Umstand vereinfacht das Einbringen von Rand- und Übergangsbedingungen der physikalischen Aufgabenstellung und wird deshalb von Tezduyar [102, 103] und Behr [10] im Zusammenhang mit einem Finite-Element-Ansatz für Strömungsrechnungen mit freien Oberflächen bevorzugt. Ein weiterer Einsatzschwerpunkt expliziter Gebietsbeschreibungsverfahren ist die Untersuchung randgekoppelter Mehrfeld-

aufgaben wie Fluid-Struktur-Wechselwirkungsphänome. Hier bleibt die Formänderung der gemeinsamen Kopplungsgrenzfläche in den meisten Anwendungen moderat und Gestaltänderungen können für eine Vielzahl praxisrelevanter Aufgaben ausgeschlossen werden.

2.1.2 Implizite Beschreibungsformen

Die unzureichende Flexibilität expliziter Verfahren bei der Beschreibung sich topologisch verändernder Gebiete und Ränder motiviert die Entwicklung geeigneterer Betrachtungsweisen. Alternative Strategien verzichten auf die Parametrisierung der Geometrie. Implizite Gebietsbeschreibungsverfahren führen im Berechnungsgebiet zusätzliche Hilfsgrößen ein, die die Zuordnung eines Raumpunktes zu einem bestimmten Teilgebiet ermöglichen. Eine Form- und Lageänderung der Teilgebiete wird durch eine entsprechende Änderung der Hilfsgröße erfasst. Die im nachfolgenden kurz beschriebenen Verfahren unterscheiden sich hauptsächlich in der Definition einer Hilfsgröße und der Fähigkeit, neben der Gebietszuordnung Informationen über die trennende Grenzfläche zu liefern (interface capturing).

Die Marker-and-Cell-Methode (MAC) von Harlow und Welch [40] wird zur Bestimmung von Wasser- und Luftphase bei der numerischen Simulation von Mehrfluidsystemen auf Grundlage einer unveränderten Diskretisierung eingesetzt. Zur Definition der Phasenverteilung im Sinne einer Anfangsbedingung werden masselose Punktpartikel regelmäßig im Gebiet einer Phase (z.B. Wasserbereich) initialisiert. Die Zuordnung einer Zelle des Netzes zu einem bestimmten Bereich einer Phase ist nun möglich: ist kein Markerpartikel in der Zelle vorhanden, liegt eine Luftzelle vor - eine Wasserzelle ist präsent, wenn sich mindestens ein Partikel in der Zelle aufhält. Die Grenzfläche und ihre Orientierung kann nicht unmittelbar identifiziert werden; sie befindet sich in jenen Zellen, die Marker enthalten und an Leerzellen grenzen. Die Partikelbewegung erfolgt in Lagrangescher Form mit der Geschwindigkeit des vorliegenden Strömungsfeldes. Dabei kann es zu lokalen Häufungen bzw. Ausdünnungen der Partikel kommen, die durch eine Neuverteilung der Marker beseitigt werden. Neben den erwähnten Nachteilen bestehen die Vorteile der MAC-Methode in der Fähigkeit, mehrere Gebiete zu identifizieren (unterscheidbare Marker) und der Eigenschaft, Strukturen der Grenzfläche unterhalb der Längenskala des Netzes abbilden zu können. Im Gegensatz zu diesem partikelbasierten Ansatz definieren nachfolgende Methoden eine Hilfsgröße im gesamten Beobachtungsgebiet als zusätzliche Feldvariable.

Die von Hirt und Nichols [43] eingeführte Volume-of-Fluid-Methode (VOF) definiert an jedem Punkt des Beobachtungsgebietes den Wert einer skalarwertigen Funktion ψ . Sie ist identisch Eins an jedem Punkt im Teilgebiet Q_1 und Null in Q_2 . Die Zuordnung

eines Raumpunktes zu einem der Teilgebiete ist mit dieser Fraktionsfunktion möglich. Die Grenzfläche zwischen den so unterschiedenen Gebieten ist identisch mit der Lage des Sprungs der VOF-Funktion ψ von Null auf den Wert Eins. Die Bewegung der Teilgebiete und der Front erfolgt durch Lösung einer Transportgleichung für ψ auf Grundlage eines im gesamten Gebiet vorliegenden Geschwindigkeitsfeldes. Dieser Propagation der Skalarfunktion folgt ein Rekonstruktionsschritt, in dem die lokale Geometrie des Interfaces (Lage, Normale, Krümmung) approximiert wird. Ein großer Vorteil des VOF-Ansatzes ist die Fähigkeit, Vereinigung und Trennung der Teilgebiete ohne zusätzlichen Aufwand auch in höheren Raumdimensionen zu erfassen. Schwierigkeiten bereitet hingegen die numerische Lösung der Transportgleichung für die sprungbehaftete Fraktionsfunktion ψ und die nicht zu verhindernde Verschmierung des Sprungs. Diese Unschärfe der Grenzflächenlage erschwert die Behandlung grenzflächensensitiver Aufgaben mit Übergangsbedingungen bzw. singulären Quelltermen an der Front.

Um Schwierigkeiten bei der Advektion einer diskontinuierlichen Skalarfunktion des VOF-Ansatzes zu vermeiden, führt die Level-Set-Methode von Osher und Sethian [75] eine kontinuierliche Funktion ϕ ein, die die Grenzfläche als Isofläche eines festen skalaren Wertes erfaßt. Jeder Punkt des Raumes kann anhand des Wertes der stetigen Level-Set-Funktion und dem festgelegten Null-Niveau der Grenzfläche einem Teilgebiet Q_1 oder Q_2 zugeordnet werden. Darüberhinaus sind die geometrischen Eigenschaften der Grenzfläche mit Hilfe der Level-Set-Funktion bestimmbar. Wie das Volume-of-Fluid-Verfahren ist die Level-Set-Methode in der Lage, topologische Änderungen auch mehrerer Grenzflächen in höheren Raumdimensionen zu erfassen.

In vielen Fällen können massive Gestaltänderungen zweckmäßiger und algorithmisch vorteilhafter mit impliziten als mit expliziten Verfahren nachvollzogen werden (Bild 2.8 und Bild 2.9). Die Genauigkeit von Volume-of-Fluid- und Level-Set-Methoden im Bereich großer Skalenunterschiede hängt stark von der lokalen Güte des diskreten Netzes ab. Die Entscheidung für ein bestimmtes Verfahren ist in jedem Falle von den Erfordernissen der physikalischen Aufgabenstellung abhängig zu machen.

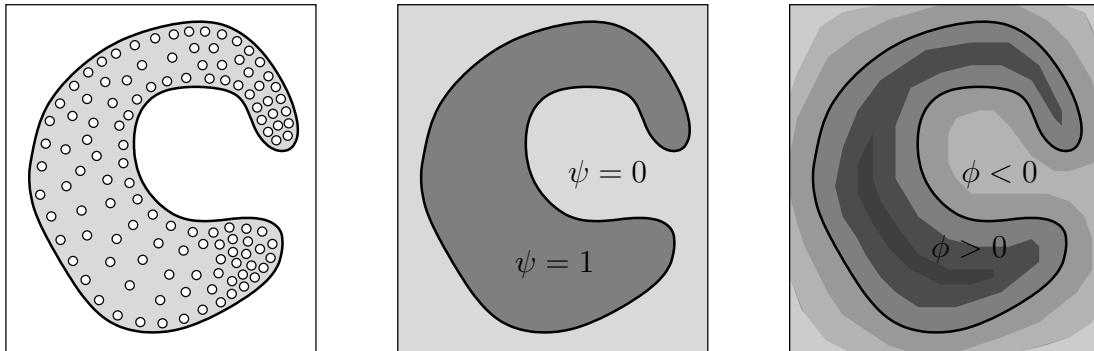


Bild 2.8: Implizite Gebietsbeschreibung: MAC, VOF und Level-Set-Methode.

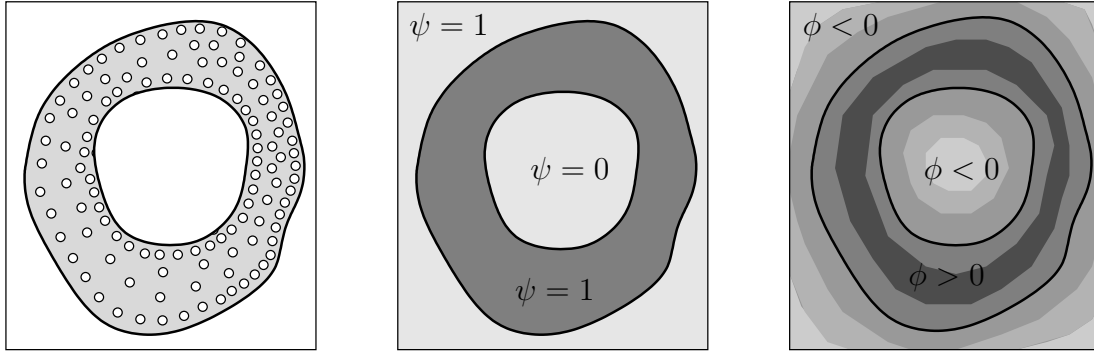


Bild 2.9: Topologische Änderungen mit impliziten Verfahren.

2.2 Level Set Methode

Im Fokus dieser Arbeit stehen zeitlich veränderliche Gebiete mit teilweise stark deformierten und topologieändernden Trennflächen, an denen das physikalische Modell Übergangsbedingungen zwischen den Gebieten formuliert. Die in Abschnitt 2.1 vorgestellten Verfahren sind in dieser Hinsicht zu bewerten. Es wird daher im folgenden die implizite Beschreibungsform mit der Level-Set-Methode favorisiert.

Die Level-Set-Methode wird auf eine Vielzahl physikalischer Aufgabenstellungen mit bewegten Gebieten und Fronten erfolgreich angewendet. Eine Übersicht liefert die Arbeit von Osher und Fedkiw [73, 74], die Anwendungen aus den Bereichen kompressibler Strömungen und inkompressibler Mehrfluidströmungen [100, 98], sowie Wärme-strömungen [28] und chemischer Reaktionsfronten [52, 91] besprechen. In allen Anwendungsfällen dient die durch den Level-Set-Ansatz eingeführte Skalarfunktion zur impliziten Darstellung und Bewegungserfassung einer materiellen Kontaktdiskontinuität. Das Verfahren wurde leicht modifiziert auch zur Simulation diskreter Risse und von Rißwachstum in elastischen Festkörpern eingesetzt [64, 29].

2.2.1 Eigenschaften

Die Idee der Level-Set-Methode besteht darin, die Menge der Grenzflächenpunkte R zwischen zwei Gebieten Q_1 und Q_2 im Beobachtungsraum durch die Menge der Punkte auf der Isofläche einer in Q definierten skalarwertigen Funktion ϕ auszudrücken.

Bild 2.10 zeigt den Verlauf der Funktion $\phi = x^2 - 1$ mit den Nullstellen x_A und x_B , die als Grenzpunkte die Teilstücke Ω_1 und Ω_2 des eindimensionalen Gebietes Ω voneinander abgrenzen. Die Skalarfunktion läßt eine Aussage über die Zugehörigkeit

eines Punktes $(\mathbf{x}, t) \in Q = \Omega \times I$ zu

$$\phi(\mathbf{x}, t) > 0 \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_1 = \Omega_1 \times I, \quad (2.3)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\mathbf{x}, t) \in R = \Sigma \times I, \quad (2.4)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) < 0 \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_2 = \Omega_2 \times I. \quad (2.5)$$

Im n -dimensionalen Raum werden $(n-1)$ -dimensionale Grenzflächen erfasst. Beispielfhaft sind die impliziten Darstellungen eines Kreises ($\phi = x^2 + y^2 - 1$) und einer Kugel ($\phi = x^2 + y^2 + z^2 - 1$) angegeben.

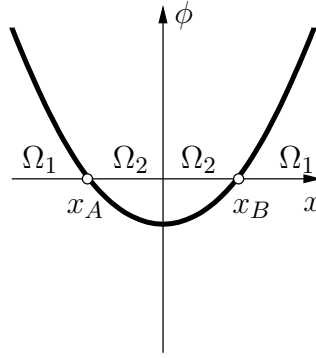


Bild 2.10: Funktion ϕ mit Null-Isofläche Σ in einer Raumdimension.

Geometrie. Ein Vorteil des Verfahrens sind die aus dem Verlauf der skalaren Funktion ableitbaren geometrischen Größen der Grenzfläche. Der Normalenvektor \mathbf{n} auf der Grenzfläche kann mit

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \frac{\nabla \phi(\mathbf{x}, t)}{\|\nabla \phi(\mathbf{x}, t)\|} \quad (2.6)$$

für jeden Punkt (\mathbf{x}, t) der Grenzfläche bestimmt werden und ist in den Bereich $\phi > 0$ orientiert. Definition (2.6) setzt die stetige Differenzierbarkeit der Funktion voraus. Die Fraktionsfunktion der ebenfalls auf einer impliziten Beschreibungsweise beruhenden VOF-Methode besitzt entlang der Grenzfläche einen unstetigen Funktionsverlauf mit unendlich großem Gradienten und kann daher nicht direkt zur Bestimmung der Normalen nach Gleichung (2.6) eingesetzt werden. Eine geeignete Definition der skalarwertigen Funktion ϕ unter Vermeidung lokal steiler bzw. flacher Gradienten ist daher zweckmäßig.

Die Krümmung κ des Interfaces entspricht der Divergenz des Vektorfeldes \mathbf{n} entlang der Grenzfläche

$$\kappa(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \quad (2.7)$$

und ermöglicht die Unterscheidung in konvexe ($\kappa < 0$) und konkave ($\kappa > 0$) Grenzflächenregionen.

Zur Bestimmung weiterer geometrischer Größen dienen die eindimensionale Signumfunktion

$$\text{sign}(\phi) = \begin{cases} -1 & \phi(\mathbf{x}, t) \leq 0, \\ 1 & \phi(\mathbf{x}, t) > 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

und die Dirac-Deltafunktion

$$\delta(\phi) = \begin{cases} 0 & \phi(\mathbf{x}, t) \neq 0, \\ 1 & \phi(\mathbf{x}, t) = 0 \end{cases}. \quad (2.9)$$

Mit Hilfe von (2.8) kann das Integral einer Funktion f über die implizit erfassten Teilgebiete Q_1 und Q_2 als Integral über das Gesamtgebiet Q beschrieben werden

$$\int_{Q_1} f dQ = \frac{1}{2} \int_Q f (1 + \text{sign}(\phi)) dQ, \quad (2.10)$$

$$\int_{Q_2} f dQ = \frac{1}{2} \int_Q f (1 - \text{sign}(\phi)) dQ. \quad (2.11)$$

Gleiches gilt für Integrale entlang der Grenzfläche R

$$\int_R f dR = \int_Q f \delta(\phi) dQ, \quad (2.12)$$

mit Verwendung der Dirac-Deltafunktion (2.9).

Abstandsfunktion. Die von Osher und Sethian [75] eingeführte Level-Set-Methode definiert die Funktion ϕ als vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \pm \min(\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t)_R\|) \quad \forall \mathbf{x}(t) \in Q. \quad (2.13)$$

Die absolute Größe von ϕ am Punkt (\mathbf{x}, t) entspricht genau dem Betrag des kleinsten euklidischen Abstandes von \mathbf{x} zu jedem Punkt \mathbf{x}_R der Grenzfläche R zum Zeitpunkt t . An bestimmten Punkten des Gebiets Q kann Äquidistanz zu mehreren Punkten der Grenzfläche R vorliegen und somit $\nabla\phi$ unbestimmt sein. Da dieser Fall im Allgemeinen bei ausreichend geringer Krümmung des Interfaces in einiger Entfernung zur Grenzfläche auftritt und dort eine Gradientenbestimmung von ϕ nicht erforderlich ist, fällt diese Einschränkung kaum ins Gewicht.

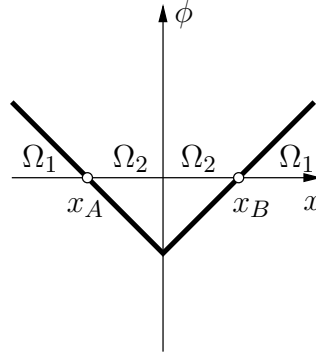


Bild 2.11: Vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion: eindimensional mit $\phi = \|x\| - 1$.

Bild 2.11 zeigt die als Abstandsfunktion definierte Skalarfunktion ϕ , mit deren Hilfe wie in Bild 2.10 die Grenzpunkte x_A und x_B , als auch die Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 beschrieben werden. Die Unstetigkeitsstelle bei $x = 0$ liegt entfernt zur Grenzfläche mit $\phi = 0$. An jedem anderen Punkt $\mathbf{x} \in Q$ ist der kürzeste Abstand zur Grenzfläche bekannt. Die Festlegung der Funktion als vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion ist auf höhere Raumdimensionen übertragbar. Für die geometrischen Größen gelten weiterhin die Beziehungen (2.6) und (2.7).

Nichtgeschlossene Fronten. Endet ein Interface innerhalb des Gebietes Ω , kann die Bezeichnung „Grenzfläche“ nicht aufrecht erhalten werden, da eine Abgrenzung von Teilgebieten nicht stattfindet (Bild 2.12). Kurven und Flächen dieser Art können im Kontext bestimmter physikalischer . Die Möglichkeit einer Beschreibung mit der Level-Set-Methode ist zu prüfen.

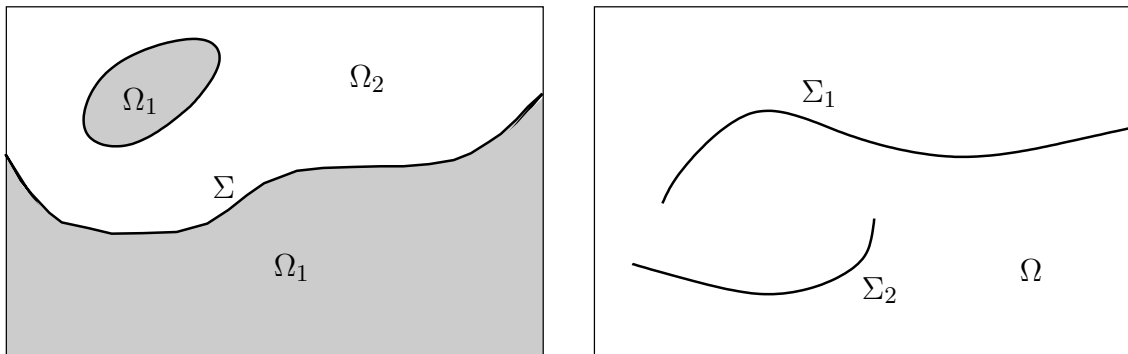


Bild 2.12: Geschlossene (a) und offene (b) Interfaces.

Zur Erfassung offener Kurven oder Flächen sind zusätzliche skalarwertige Funktionen zu definieren. Die Abstandsfunktion ϕ beschreibt die Lage des Interfaces, während eine weitere Abstandsfunktion φ die Endpunkte des offenen Interfaces implizit kennzeichnet (Bild 2.13).

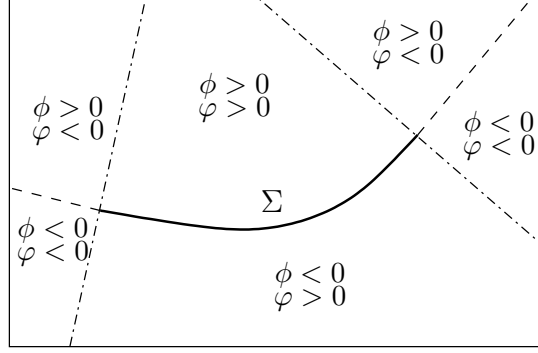


Bild 2.13: Repräsentation einer offenen Kurve mit zwei Abstandsfunktionen ϕ und φ .

Dynamik der Grenzfläche. Die Lageänderung eines materiellen Punktes auf der Grenzfläche ist abhängig von Betrag und Richtung der an diesem Ort vorliegenden Geschwindigkeit \mathbf{v} . Die Null-Isofläche der Funktion ϕ muß zu jedem Zeitpunkt ihrer Bewegung mit der Lage der Grenzfläche R identisch sein – daher gilt

$$\phi(\mathbf{x}(t), t) = 0 \quad (2.14)$$

entlang des Bewegungspfad des materiellen Grenzflächenpunktes (\mathbf{x}, t) . Die Zeitableitung von Gleichung (2.14) unter Anwendung der Kettenregel beschreibt die Entwicklung der Funktion ϕ mit

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (2.15)$$

und führt mit Gleichung (2.1) zur Evolutionsgleichung

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi = 0. \quad (2.16)$$

Sie beschreibt die Bewegung des Interfaces in einem Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} . In der Literatur wird (2.16) bei der Definition von ϕ mit (2.13) als „Level-Set-Gleichung“ bezeichnet.

In vielen Fällen liegt das Geschwindigkeitsfeld nicht ausschließlich auf der Grenzfläche R vor, sondern ist in natürlicher Weise in Q definiert (z.B. Strömungen). Unter dieser Voraussetzung ist Gleichung (2.16) im gesamten Gebiet mit der Anfangsbedingung

$$\phi(t_a) - \phi_a = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (2.17)$$

zur Festlegung einer anfänglichen Grenzflächenlage und der Randbedingung

$$\phi - \bar{\phi} = 0 \quad \text{auf } P : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_P < 0, \quad (2.18)$$

zu lösen, wobei \mathbf{n}_P die nach außen gerichtete Randnormale des äußeren Gebietsrandes P ist. Die Randbedingung (2.18) gewährleistet an allen Punkten des Gebietrandes,

an denen Information in das Berechnungsgebiet eingetragen wird ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_P < 0$), einen definierten Zustand der Level-Set-Funktion. Die Vorgabe von $\bar{\phi}$ erfolgt idealerweise konsistent zur Abstandseigenschaft. Die in Abschnitt 2.2.4 vorgenommenen Untersuchungen zeigen jedoch, daß es in vielen Fällen hinreichend ist, die Level-Set-Funktion am „Einflußrand“ des Gebietes vorzeichengerecht und in der Größenordnung der Level-Set-Werte benachbarter Gebietspunkte einzustellen.

Ist das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} nicht verfügbar, sondern ausschließlich die lokalen Grenzflächengeschwindigkeiten, können Extrapolationsmethoden [2, 23] eingesetzt werden, um im gesamten Gebiet Q ein künstliches Geschwindigkeitsfeld \mathbf{w} zu erzeugen, das das Interface konform zu den lokalen Interface-Geschwindigkeiten bewegt. Die Lösung von Gleichung (2.16) erfaßt neben Lage- auch Formänderungen bzw. topologische Wechsel der Grenzfläche in natürlicher Weise. Bild 2.14 stellt das Zusammentreffen zweier Grenzflächen und eine entsprechende Gebietsvereinigung dar.

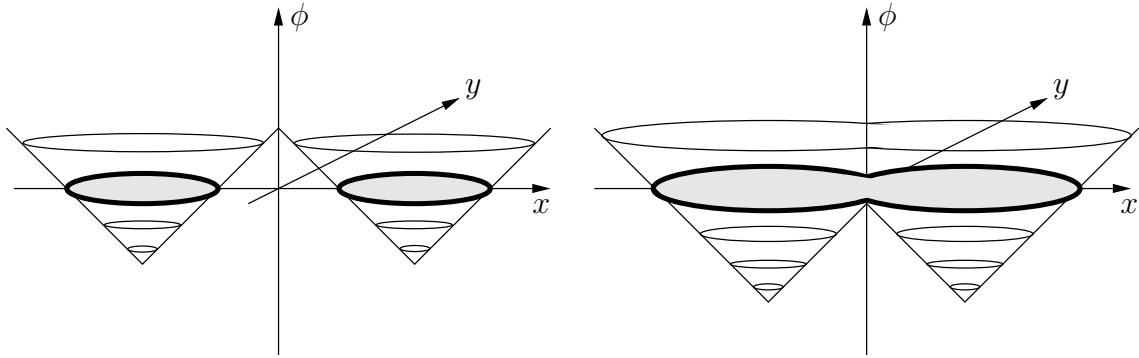


Bild 2.14: Gestaltänderung von Gebieten und Fronten mit der Level-Set-Methode [86].

2.2.2 Hamilton-Jacobi-Gleichungen und Erhaltungsgleichungen

Gleichungen der Form

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + H(\nabla \phi) = 0, \quad (2.19)$$

werden als vom Hamilton-Jacobi-Typ bezeichnet. Der Hamilton-Operator H ist eine Funktion von Raum und Zeit. Hamilton-Jacobi-Gleichungen besitzen höchstens Ableitungen ersten Grades der Funktion ϕ und sind hyperbolische partielle Differentialgleichungen. Der Hamilton-Operator der Level-Set-Gleichung (2.16) ist $H = \mathbf{v} \cdot \nabla \phi$.

In diesem Abschnitt werden Zusammenhänge zwischen der Level-Set-Gleichung als spezielle Hamilton-Jacobi-Gleichung und skalarwertigen Bilanzgleichungen hergestellt. Ausgehend von der eindimensionalen Level-Set-Gleichung in lokaler Form

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \phi_{,x} = 0 \quad (2.20)$$

folgt durch Ableitung nach der Raumkoordinate x die Gleichung

$$\frac{\partial \phi_{,x}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial \phi_{,x}}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.21)$$

Mit der Größe $u = \phi_{,x}$ erhält (2.21) mit

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (vu) = 0 \quad (2.22)$$

die Form einer lokalen Erhaltungsgleichung für die skalare Größe u . Die Lösung der Erhaltungsgleichung (2.22) entspricht der räumlichen Ableitung der Lösung ϕ der eindimensionalen Level-Set-Gleichung (2.20). Umgekehrt ist die Lösung der Level-Set-Gleichung identisch mit dem Integral der Lösung der zugehörigen Erhaltungsgleichung. Für Hamilton-Jacobi-Gleichungen sind nur dann diskontinuierliche Lösungen zu erwarten, wenn die Lösung der korrespondierenden Erhaltungsgleichung zur Deltafunktion degeneriert. Daher sind Lösungen der Level-Set-Gleichung im Allgemeinen kontinuierlich und weisen somit günstige Eigenschaften für eine numerische Behandlung auf, siehe Bild 2.15.

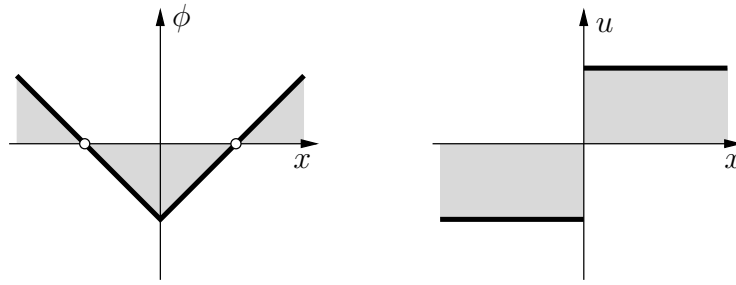


Bild 2.15: Lösungsanalogie zwischen Hamilton-Jacobi- und Erhaltungsgleichungen.

Im folgenden erfährt die lokale Level-Set-Gleichung eine Überführung in die integrale Darstellung. Die Lösung dieser gewichteten Integralform erfüllt die lokale Level-Set-Gleichung im Mittel über das gesamte Gebiet einer Raum-Zeit-Scheibe. Zusammen mit einer Stabilisierung der reinen Advektionsgleichung ist das numerische Verfahren in der Lage, eine eindeutige Lösung zu bestimmen.

2.2.3 Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung

Die stabilisierte und zeitdiskontinuierliche Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung der Level-Set-Gleichung für die Raum-Zeit-Scheibe $Q_n = \Omega_t \times I_n$ mit dem Dirichlet-Rand $P_n^\phi = \Gamma_n^\phi \times I_n$ lautet

$$\int_{Q_n} \delta\phi \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi \right) dQ \quad (2.23a)$$

$$+ \int_{Q_n} \delta\phi(t_n^+) (\phi(t_n^+) - \phi(t_n^-)) dQ \quad (2.23b)$$

$$+ \sum_e \int_{Q_n^e} \mathcal{L}(\delta\phi) \tau_L \mathcal{L}(\phi) dQ \quad (2.23c)$$

$$+ \int_{P_n^\phi} \delta\phi \frac{1}{\epsilon} (\phi - \bar{\phi}) dP = 0 \quad \forall \delta\phi. \quad (2.23d)$$

Der Operator

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi \quad (2.24)$$

beschreibt das Residuum der differentiellen Form (2.16) der Level-Set-Gleichung. Die numerische Lösung der Level-Set-Modellgleichung im Raum-Zeit-Gebiet Q erfolgt sequentiell mit der Auswertung von (2.23) für alle Zeitscheiben Q_0, \dots, Q_{N-1} und beginnt nach (2.17) mit der die initialen Gebiete und Grenzflächen beschreibenden Anfangsbedingung

$$\phi(t_a^-) = \phi_a \quad \text{in } \Omega. \quad (2.25)$$

Primale Variable der Formulierung ist die vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion ϕ , ihre Approximation erfolgt stetig im Raum und weist in der Zeit diskontinuierliche Verläufe an den Übergängen der Zeitscheiben auf. Die im Rahmen dieser Arbeit eingesetzten isoparametrischen 6-Knoten-Raum-Zeit-Prismenelemente verwenden zur Interpolation der Level-Set-Funktion und der Geometrie lineare Ansätze.

In der gewichteten Integralformulierung (2.23) der Level-Set-Gleichung zeigt Zeile (2.23a) die nach Bubnov-Galerkin-Wichtung von (2.16) folgende Form der Advektionsgleichung mit externem Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} . Der Sprungterm der Level-Set-Funktion in Zeile (2.23b) erfüllt die Übergangsbedingungen an den Zeitscheibenrändern in der diskontinuierlichen Galerkin-Formulierung. In Zeile (2.23c) folgt die für Advektionsgleichungen erforderliche Stabilisierung in Form einer Galerkin-/Least-Squares-Stabilisierung mit dem elementweise definierten Stabilisierungsparameter τ_L . Die Zeile

(2.23d) beinhaltet die mit der Abstandsfunktion und einem Penalty-Faktor $\frac{1}{\epsilon}$ gewichtete Integralformulierung der Dirichlet-Randbedingung (2.18) auf allen Randabschnitten $P_n^\phi = \{(\mathbf{x}, t) : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_P < 0\}$ mit Informationseintrag in das Gebiet Q durch ein externes Geschwindigkeitsfeld.

Stabilisierung. Die Anwendung des Bubnov-Galerkin-Verfahrens zur numerischen Lösung von Advektions-Diffusions-Gleichungen führt bei Dominanz der advektiven Anteile zu unphysikalischen Oszillationen der Lösung in Raum und Zeit. Die Modellgleichung der Level-Set-Methode ist eine reine Advektionsgleichung ohne diffusive Anteile. Eine Galerkin-/Least-Squares-Stabilisierung der Level-Set-Gleichung sichert glatte Lösungen im Bereich ausgeprägter Advektion. Die Festlegung des Stabilisierungsparameters folgt den Empfehlungen von Tezduyar et al. [102] und Barth [8] zu

$$\tau_L = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{2\|\mathbf{v}_{rel}\|}{h}\right)^2}}. \quad (2.26)$$

Der Durchmesser eines Kreises vom Flächeninhalt der zeitlich gemittelten Elementfläche geht als lokales Längenmaß h in den Stabilisierungsparameter ein. Der Betrag der Geschwindigkeit \mathbf{v}_{rel} relativ zu einer Netzbewegung findet als Maß der advektierenden Geschwindigkeit ebenfalls Eingang in den Stabilisierungsparameter τ_L . Mit feiner werdender räumlicher und zeitlicher Diskretisierung strebt der Stabilisierungsparameter gegen Null.

Grenzflächenlage im Element. Ein wesentlicher Vorteil der Finite-Element-Approximation der Level-Set-Funktion besteht in der Möglichkeit, elementweise die raumzeitliche Lage der Grenzfläche mit $\phi = 0$ durch Auswertung der Ansatzfunktionen für ϕ zu bestimmen. Bei entsprechend abgestimmter Wahl von Elementgeometrie und Ansätzen in Raum und Zeit kann die Lage der diskreten Grenzfläche im Element exakt bestimmt werden. Raum-Zeit-Simplex-Elemente besitzen diese Eigenschaft, für das Prismenelement gilt dies nur für die Raumdimensionen (Bild 2.16).

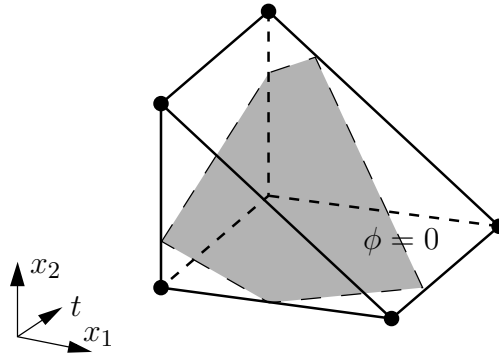


Bild 2.16: Diskrete Lage der Grenzfläche ($\phi = 0$) im Raum-Zeit-Prismen-Element.

Einige physikalische Aufgabenstellungen erfordern die Auswertung von Integralen über die Grenzfläche R . Nach einer Bestimmung der elementweisen Integrationspunkte auf dem interpolierten Interface können diese Terme mit hoher Genauigkeit numerisch bestimmt werden.

2.2.4 Konvergenzuntersuchungen

Die Qualität der mit der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode gewonnenen Lösung der Level-Set-Gleichung ist zu bewerten und die Konvergenzeigenschaften des Lösungsverfahrens zu untersuchen. Zu diesem Zweck wird eine geometrische Figur Starrkörperbewegungen (Translation, Rotation) und Deformationen ausgesetzt. Für alle Testfälle ist die zu erwartende Endlage ϕ_{erw} der Figur bekannt – sie stimmt mit der Ausgangslage überein. Zur Bestimmung der Lagegenauigkeit des berechneten Interfaces ϕ_{ber} wird das von Sussmann [97] definierte Fehlermaß

$$e_\phi = \frac{1}{2L} \sum_e \int_{\Omega_e} \| \text{sign}(\phi_{\text{erw}}) - \text{sign}(\phi_{\text{ber}}) \| \, d\Omega \quad (2.27)$$

verwendet. Die Berechnung des Integrals über das räumliche Elementgebiet mit unstetigem Integranden ist durch Unterteilung in Subelemente anhand der Null-Isokonturen möglich. Das Maß L entspricht der Gesamtlänge des erwarteten Interfaces. Volumenverluste bzw. -gewinne sind mit Vorschrift (2.11) für die absolute Volumenabweichung

$$e_{v-} = \| V_0^- - V_{\text{ber}}^- \| \quad (2.28)$$

des Teilgebiets mit $\phi < 0$ bezüglich seines Volumens V_0^- der Ausgangslage zu bestimmen.

Das folgende Beispiel untersucht das Verhalten einer kreisförmigen Grenzfläche im zweidimensionalen Raum. Auf einem Quadrat der Kantenlänge $H = 1\text{m}$ mit Ursprung $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ beschreibt die Abstandsfunktion $\phi_0 = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} - r$ einen Kreisring mit dem Radius $r = 0.15H$ und den Mittelpunktswerten $(x_c = 0.5H, y_c = 0.75H)$. Die Bewegung des Kreisrings erfolgt mit drei vorgegebenen zeitabhängigen Geschwindigkeitsfeldern (in m/s)

$$\mathbf{v}_{\text{trans}}(\mathbf{x}, t) = \cos(\pi t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

$$\mathbf{v}_{\text{rot}}(\mathbf{x}, t) = \cos(\pi t) \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} + y \\ -3x \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{v}_{\text{deform}}(\mathbf{x}, t) = \cos(\pi t) \begin{pmatrix} -8 \sin^2(\pi x) \sin(\pi y) \cos(\pi y) \\ 8 \sin^2(\pi y) \sin(\pi x) \cos(\pi x) \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

die so konstruiert sind, daß bei exakter Lösung der Bewegungsgleichung die Lage des Kreisrings zum Zeitpunkt $t = 1.0\text{s}$ mit der Ausgangslage übereinstimmt. Die ersten beiden Felder $\mathbf{v}_{\text{trans}}$ und \mathbf{v}_{rot} sind divergenzfrei und rufen Starrkörperbewegungen des Kreisrings hervor. Im Gegensatz dazu ist $\mathbf{v}_{\text{deform}}$ divergenzbehaftet. Die im Zeitverlauf hier eintretende und bei $t = 0.5\text{s}$ maximale Verzerrung der ursprünglichen Kreisform wird mit dem zeitabhängigen Term zum Zeitpunkt $t = 1.0\text{s}$ rückgängig gemacht.

Die numerische Lösung erfolgt mit Raum-Zeit-Prismenelementen auf verschieden feinen regelmäßigen Netzen, siehe Bild 2.17, mit Knotenabstand $\Delta h = 10^{-1}\text{m}, \dots, 10^{-3}\text{m}$ und der Zeitschrittweite $\Delta t = 10^{-3}\text{s}$ im Bereich $T =]0\text{s}, 1\text{s}]$. Der Penalty-Faktor zur Realisierung gesetzter Größen für die Level-Set-Funktion ϕ auf Bereichen des Gebietsrandes mit in das Gebietsinnere gerichteten Geschwindigkeitsvektoren wird zu $\frac{1}{\epsilon} = 1$ gewählt und liegt in der Größenordnung der Gebietsabmessungen. Die Wahl eines wesentlich größeren Penalty-Faktors hat in den untersuchten Fällen nur geringfügig Einfluß auf die Sicherstellung der Vorzeichentreue der Level-Set-Funktion.

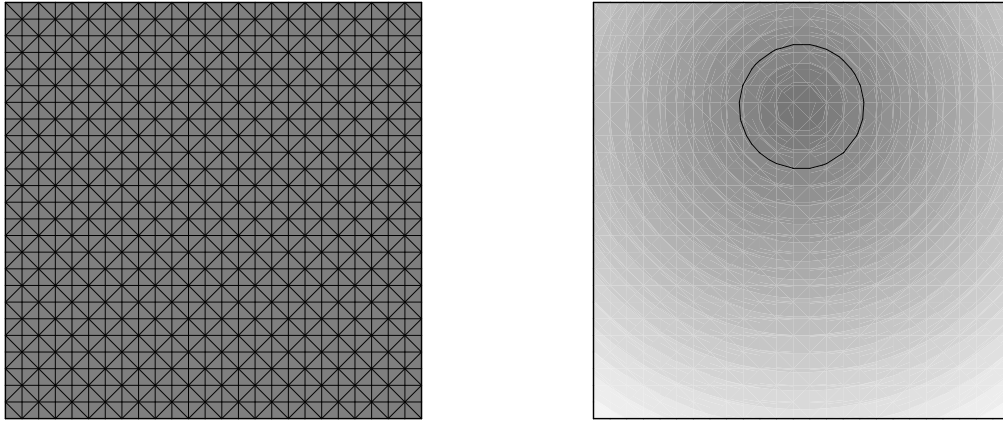


Bild 2.17: Netz und Anfangsbedingung Level-Set-Funktion

Bild 2.18 zeigt exemplarisch die Geschwindigkeitsfelder der drei Testfälle bei $t = 0$ und die Lage der bewegten Grenzfläche zu den Zeitpunkten $t = 0.5\text{s}$ und $t = 1.0\text{s}$ aus einer numerischen Berechnung auf einem mittelfeinen Netz ($\Delta h = 4 \cdot 10^{-2}\text{m}$). Im Fall von Translation und Rotation bleibt während der Bewegung die Gestalt der Grenzfläche erhalten, wobei die Level-Set-Funktion am Ende der Berechnung von der Anfangsbedingung abweichen kann. Unter Einfluß des verzerrenden Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{v}_{\text{deform}}$ treten in der zeitlichen Entwicklung erhebliche Stauchungen und Streckungen der Level-Set-Funktion auf, die zu lokal großen Krümmungen des Null-Niveaus führen und sehr feine Grenzflächenstrukturen ausbilden. Fällt die Abmessung solcher Strukturen unter die des zugrundeliegenden Berechnungsnetzes, kann die filigrane Grenzfläche nicht mehr hinreichend approximiert werden. In diesem Fall kommt es zu einer unzulässigen Anlagerung bzw. Auflösung der kritischen Bereiche.

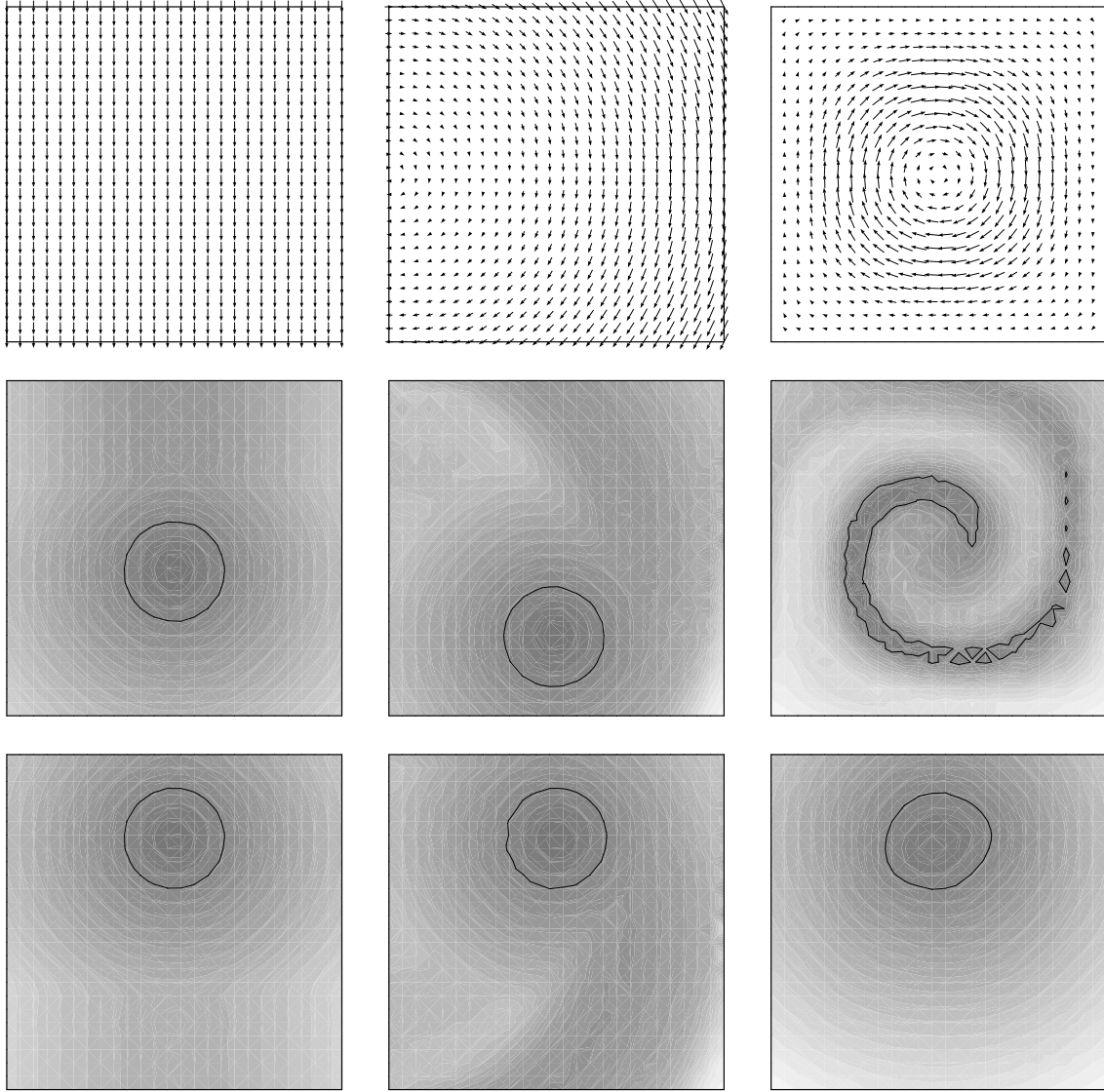


Bild 2.18: Translatorische, rotatorische und deformative Bewegung.

Für alle drei Testfälle ist die Entwicklung des mit (2.27) bestimmten Fehlers der Grenzflächenendlage in Abhängigkeit von der Auflösung des räumlichen Netzes in Bild 2.19a dargestellt. Der Lagefehler e_ϕ konvergiert für lineare Ansätze in Raum und Zeit und unabhängig vom vorliegenden Geschwindigkeitsfeld quadratisch gegen Null. Es ist ersichtlich, daß der Lagefehler der Starrkörperbewegungen konstant eine Größenordnung unter dem Fehler der Endlage des deformierten Kreises liegt. Eine Ursache hierfür ist der irreversible Verlust von in der Level-Set-Funktion enthaltenen Gebietsinformationen bei Schwächen der räumlich linearen Ansatzfunktionen in der Umgebung stark gekrümmter Null-Isoflächen.

Ähnliche Aussagen gelten für den absoluten Volumenfehler e_v -, siehe Bild 2.19b. Die Konvergenzrate des Fehlers bei Bewegung in einem translatorischen bzw. rotatorischen

Geschwindigkeitsfeld ist von zweiter Ordnung. Der Volumenfehler im Deformationsbeispiel konvergiert hingegen nur näherungsweise quadratisch gegen Null. Das verzerrende Geschwindigkeitsfeld und daraus resultierende lokale Approximationsschwächen führen zu einer absolut gesehen größeren Volumenabweichung. Bild 2.19b unterstreicht das monotone Konvergenzverhalten des Verfahrensfehlers der durch die Level-Set-Funktion erfassten Lage und Volumina.

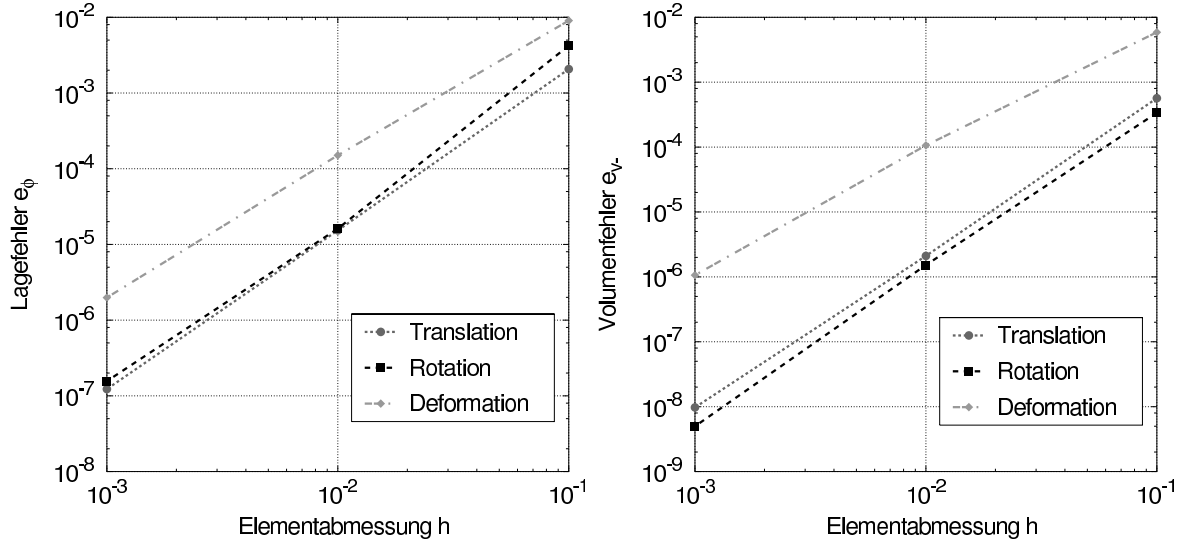


Bild 2.19: Konvergenzuntersuchung: Lagefehler und Volumenfehler.

2.2.5 Normale und Krümmung der Grenzfläche

Typisch für Aufgabenstellungen randgekoppelter Kontinua ist das Auftreten von Modellgleichungstermen, in die die Normale oder die Krümmung des Kopplungsrandes eingehen. Neben der Lagebeschreibung durch die Null-Isokontur der Level-Set-Funktion ist daher oft die Bestimmung von Grenzflächennormale und -krümmung erforderlich.

Mit Gleichung (2.6) ist die Ermittlung der Normale an einen Punkt der Grenzfläche durch Bildung der ersten Ableitung von ϕ möglich, mit (2.7) und den zweiten Ableitungen der Level-Set-Funktion die Krümmungsbestimmung. Die Grenzflächennormale im Element ist bei linearen Ansätzen räumlich konstant und von erster Ordnung genau. Eine Aussage über die Größe der Krümmung ist in diesem Fall nicht möglich, da die zweiten Ableitungen nach den Raumkoordinaten verschwinden. Nur die Verwendung höherer polynomialer Ansätze für ϕ ermöglicht die direkte Ermittlung der Krümmung.

Diese Beschränkung kann bei Bestimmung von Normale und Krümmung mit dem Gradientenmittlungsverfahren (gradient averaging technique) vermieden werden. Die Berechnung eines geglätteten Vektorfeldes der Normalen $\tilde{\mathbf{n}}$ gelingt durch Lösung der

aus (2.6) entwickelten gewichteten Integralgleichung

$$\int_{Q_n} \delta \tilde{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} dQ - \int_{Q_n} \delta \tilde{\mathbf{n}} \cdot \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} dQ = 0 \quad \forall \delta \tilde{\mathbf{n}} \quad (2.32)$$

in der Raum-Zeit-Scheibe Q_n und führt zu einer C_0 -stetigen Approximation der Normale im Berechnungsgebiet. Auf Grundlage dieser Normalenlösung ist die Krümmung der Grenzfläche nach (2.7) mit elementweise konstantem Verlauf angenähert. Zur Ermittlung eines stetigen Krümmungsverlaufes $\tilde{\kappa}$ über die Elementkanten kann alternativ auf (2.7) die Methode der gewichteten Residuen angewendet und die nach partieller Integration resultierende schwache Form

$$\int_{Q_n} \delta \tilde{\kappa} \tilde{\kappa} dQ + \int_{Q_n} \delta \nabla \tilde{\kappa} \cdot \tilde{\mathbf{n}} dQ + \int_{P_n} \delta \tilde{\kappa} \tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n}_P dP = 0 \quad \forall \delta \tilde{\kappa} \quad (2.33)$$

in der Raum-Zeit-Scheibe verwendet werden. In [90] wird für den räumlichen Fall gezeigt, daß mit Lösung der Integralformen (2.32) und (2.33) zur Normalen- und Krümmungsberechnung ein Verfahren höherer Ordnung vorliegt. Mit linearen Ansätzen für ϕ , $\tilde{\mathbf{n}}$ und $\tilde{\kappa}$ im Raum konvergiert das Verfahren im diskutierten Beispiel quadratisch gegen die exakte Lösung.

2.2.6 Reinitialisierung

Die Anfangsbedingung (2.17) der Level-Set-Gleichung wird nach Definition (2.13) als vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion bezüglich der Grenzfläche Σ eingebracht. Da die Lösung von (2.16) im Regelfall keine Abstandsfunktion mit der Eigenschaft $\|\nabla \phi\| = 1$ ist, siehe [36], können lokale Abflachungen bzw. Aufsteilungen in Verlauf von ϕ auftreten, wie in Bild 2.20 schematisch gezeigt. Ursache sind starke Gradienten im transportierenden Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} der Level-Set-Funktion.

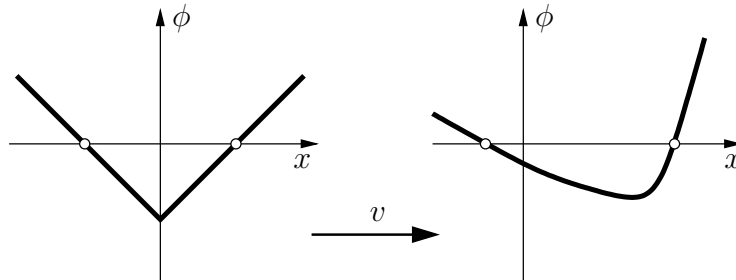


Bild 2.20: Abweichungen von der Abstandseigenschaft der Level-Set-Funktion.

Aus diesem Grunde ist es zweckmäßig, die Level-Set-Funktion ϕ als vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion zu reinitialisieren. Auf diese Weise bleibt der Verlauf von ϕ

im Bereich der Grenzfläche hinreichend glatt und besitzt die Eigenschaft $\|\nabla\phi\| = 1$. Die Reinitialisierung von ϕ , d.h. eine Lösungsmodifikation der instationären Level-Set-Gleichung ist zulässig, da die Lage der Grenzfläche nicht von der speziellen Wahl der Anfangsbedingung ϕ_a abseits der Null-Isokontur abhängig ist, sondern nur von der durch $\phi_a = 0$ beschriebenen Initialgrenzfläche. Bei Reinitialisierung wird eine degenerierte Level-Set-Funktion ϕ durch eine neue Abstandsfunktion $\tilde{\phi}$ mit identischer Null-Isokontur ersetzt.

In der Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung der Level-Set-Gleichung kann eine modifizierte Level-Set-Funktion $\tilde{\phi}$ mit den Übergangsbedingungen (2.23b) zwischen den Zeitscheiben

$$\phi(t_n^+) = \tilde{\phi}(t_n^-) \quad (2.34)$$

berücksichtigt werden. Die reinitialisierte Lösung am Ende der letzten Zeitscheibe ist Anfangsbedingung der Berechnung der aktuellen Zeitscheibe.

Methoden. Das Ziel jeder Reinitialisierung ist die Erzeugung einer kompatiblen vorzeichenbehafteten Abstandsfunktion $\tilde{\phi}$ bezüglich der Grenzfläche Σ . Bestehende Verfahren unterscheiden sich hauptsächlich darin, ob eine Parametrisierung der implizit erfaßten Grenzfläche stattfindet oder gerade dies vermieden wird.

Der Ansatz von Sussmann et al. [100] vermeidet eine Parametrisierung durch Lösung der instationären und nichtlinearen Advektionsgleichung

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tau} + \text{sign}(\phi) \mathbf{n}(\tilde{\phi}) \cdot \nabla \tilde{\phi} = \text{sign}(\phi) , \quad (2.35)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\tilde{\phi}(\tau = 0) = \phi \quad (2.36)$$

in künstlicher Zeit τ . Gleichung (2.35) transportiert die Eigenschaft $\|\nabla\phi\| = 1$ vorzeichengerecht vom Interface mit $\phi = 0$ in das Berechnungsgebiet hinein. Die stationäre Lösung entspricht einer vorzeichengerechten Abstandsfunktion mit unveränderter Lage der Null-Isokontur. Daß die Grenzfläche bei diesem Ansatz nicht diskret lokalisiert werden muß, ist vor allem bei räumlich dreidimensionalen Aufgaben von großem Vorteil. Dennoch ist dieses Vorgehen mit Lösung einer hyperbolischen Differentialgleichung mit einem nicht zu vernachlässigenden numerischen Aufwand verbunden.

Zu den die Grenzfläche lokalisierenden Verfahren gehört die effiziente Lösung der Eikonalgleichung

$$\|\nabla\phi\| = 1 , \quad (2.37)$$

wie von Adalsteinsson und Sethian in [1, 84, 85] beschrieben. Ausgehend von einer direkten Abstandsbestimmung der Knoten aller grenzflächenbeherbergenden Elemente zum Nullniveau, wird sukzessive und mit zunehmender Entfernung vom Interface die reinitialisierte Abstandsfunktion aufgebaut. Dabei gewährleistet ein graphentheoretischer Ansatz, daß die Knoten des Berechnungsnetzes mit minimaler Häufigkeit bearbeitet werden. In Kombination mit effizienten Datenstrukturen (Binärbäume) ist dieser Algorithmus als Fast Marching Method (FMM) in die Literatur eingegangen.

Ein weiterer parametrisierender Ansatz ist rein algebraischer Natur. Die direkte Methode [79, 25, 90] extrahiert in einem ersten Schritt die Grenzfläche als Menge geometrischer Primitiva (z.B. Geraden in zwei Dimensionen, Dreiecke in 3 Raumdimensionen). Anschließend wird für jeden Knoten der kürzeste Abstand zu allen zuvor extrahierten Segmenten bestimmt. Das Vorzeichen der Abstandsfunktion $\tilde{\phi}(\mathbf{x})$ ist identisch mit dem der degenerierten Level-Set-Funktion $\phi(\mathbf{x})$. Obwohl der Zeitaufwand mit wachsender Knotenzahl je Raumrichtung mit höherer Ordnung anwächst, stellt er oft nur einen Bruchteil der Berechnungszeit zur Lösung des physikalischen Problems dar. Der Einsatz spezieller Techniken (Quadtree-, Octree-Verfahren) kann eine erhebliche Reduktion des Aufwandes ermöglichen [94].

In Abwägung der algorithmischen Komplexität der beschriebenen Methoden und der Möglichkeit, im Rahmen von Finite-Element-Ansätzen die Nullmenge der Level-Set-Funktion im Element eindeutig parametrisieren zu können, ist in dieser Arbeit die direkte Methode realisiert.

2.2.7 Verbesserung der Erhaltungseigenschaften

Das Vermögen der Level-Set-Methode, Strukturen der Grenzflächengeometrie zu erfassen ist stark an die Güte der Approximation gekoppelt. Bei Verwendung höherer Ansätze bzw. feinerer Netze ist zu erwarten, daß kleinskalige Interfacestrukturen oder große Grenzflächenkrümmungen hinreichend genau abgebildet werden können. Der Einsatz entsprechender h - und p -adaptiver Verfahren ist ein vielversprechender Ansatz, Auflösungsvermögen und gegebenenfalls Volumenkonservativität wesentlich zu erhöhen.

Neben adaptiven Ansätzen existieren eine Reihe weiterer Verfahren, die insbesondere die Volumenerhaltung der Level-Set-Methode zum Ziel haben. Um Fehler bei der gelegentlichen Reinitialisierung der Level-Set-Funktion zu minimieren, schlagen Chang [22] sowie Sussmann und Fatemi [97] Nebenbedingungsformulierungen im Rahmen eines Finite-Differenzen-Schemas vor. Approximationsfehler bei der Lösung der Level-Set-Gleichung werden hiermit jedoch nicht reduziert. Smolianski [90] korrigiert die Lage der Null-Isofläche durch Addition eines gebietskonstanten Wertes ϕ_c zur Ab-

standsfunktion ϕ . Der Korrekturwert ϕ_c wird als die auf die Interfacelänge bezogene Volumenabweichung bestimmt. Bei komplexer Grenzflächengeometrie hat sich dieser Ansatz nicht bewährt, da inhomogene Gebiete und Interfaces in der Regel eine stark ortsabhängige Korrekturfunktion ϕ_c benötigen. Der hybride Ansatz von Enright [30] kombiniert Level-Set-Methode und Partikelverfahren. Masselose Punktpartikel werden in Lagrangescher Form durch das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} bewegt, während die Level-Set-Funktion in Eulerscher Betrachtungsweise advektiert wird. Nach Auswertung der mit verfahrensbedingt geringeren Fehlern behafteten Partikelpositionen wird die Null-Isokontur der Level-Set-Funktion modifiziert. In [30] ist gezeigt, daß diese hybride Herangehensweise Volumen- und Lagefehler wesentlich minimieren kann. Allgemeine Aussagen über die Konvergenzeigenschaften des Verfahrens sind jedoch nicht möglich.

3. Diskontinuierliche Beschreibungsgrößen

3.1 Anforderungen und Überblick

Die Finite-Element-Methode ist in vielen Bereichen des Ingenieurwesens ein etabliertes Verfahren zur Lösung der Modellgleichungen komplexer physikalischer Prozesse. Ihre Popularität verdankt dieses numerische Lösungsverfahren seiner Flexibilität und Robustheit in der Anwendung auf verschiedene Aufgabenstellungen. Dazu gehören die Elasto- und Fluidodynamik, Wärmeleitung und Elektromagnetismus. Nichtlinearitäten im Gleichgewicht, der Kinematik und den Konstitutivgleichungen können berücksichtigt werden. Trotz dieses Erfolges der Methode existieren Anwendungsbereiche, für die der Einsatz herkömmlicher Finite-Element-Ansätze als wenig geeignet gilt.

Standard-Finite-Element-Methoden verwenden stückweise stetig differenzierbare Polynome zur Approximation unbekannter Feldgrößen. Enthält die Lösung der zu betrachtenden Aufgabe Diskontinuitäten, diskontinuierliche Gradienten, Singularitäten oder Grenzschichten, d.h. besitzt die Lösungsfunktion deutlich nichtpolynomialen Charakter, folgt oft eine signifikante Verschlechterung der Konvergenzeigenschaften [42]. Ursache für dieses Verhalten sind auf den Lösungsraum nicht abgestimmte Approximationsansätze. Zur Erzielung einer hinreichenden Lösungsgenauigkeit ist die aufwendige Anpassung der Diskretisierung nötig, im Allgemeinen eine gravierende Verfeinerung des räumlichen Netzes in der Umgebung der nichtpolynomialen Lösung.

Der Einsatz adaptiver Verfahren, die die räumliche Auflösung (h-Version) bzw. den Polynomgrad der Ansatzfunktionen (p-Version) auf Grundlage geeigneter Fehlerindikatoren und -schätzer erhöhen, kann die Genauigkeit der Lösung verbessern. Da adaptive Verfahren den Funktionenraum der Approximation nur in gewissen Grenzen variieren (Änderung des Polynomgrades) und selten an die oben erwähnten speziellen Lösungseigenschaften anpassen können, bleiben die Konvergenzeigenschaften herabgesetzt. Eine Alternative ist die zweckmäßige Ansatzmodifikation der zu approximierenden physikalischen Größe, so daß der Funktionenraum der modifizierten Approximation das Verhalten der Lösung widerspiegeln kann. Hierbei tragen ersetzende bzw. ergänzende Ansatzfunktionen dem speziellen Charakter der Lösung Rechnung. Hierzu zählen spektrale [20] und rationale [105] Finite-Element-Ansätze, hierarchische finite Elemente [107, 7, 54] und die Partition-of-Unity-FEM [63, 6].

Wie adaptive Verfahren sind auch Methoden, die den Ansatzraum dem zu untersuchenden Problem anpassen, mit einem Mehraufwand bei der numerischen Lösung verbunden. Liegt Vorauswissen über Lösungscharakteristiken der Aufgabe vor, ist in vielen Fällen durch die geeignete Wahl des Approximationsraumes ein deutlich verbessertes Konvergenzverhalten des Verfahrens im Vergleich zu standardmäßig polynomialen Finite-Element-Ansätzen zu verzeichnen.

3.2 Angereicherte Finite-Element-Ansätze

Die Modifikation der Ansatzfunktionen finiter Elemente ist dann zweckmäßig, wenn a priori Aussagen über Ort und Eigenschaften der zu erwartenden Lösungsfunktion vorliegen und in die Modellierung der Finite-Element-Basis einfließen können. Ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen charakteristischem Lösungsverlauf und dessen Lage ist bei randgekoppelten Kontinua mit der Kopplungsfläche gegeben und tritt zum Beispiel bei Kontaktunstetigkeiten in Erscheinung.

Die Anwendung kontinuierlicher Standardansätze zur Approximation diskontinuierlicher Funktionen kann zu unphysikalischen und damit unbrauchbaren Lösungen führen [50]. Aus dem Umfeld numerischer Untersuchungen von Schädigungsprozessen und Rißbildung entwickelten Ortiz [72] und Belytschko [12] finite Elemente mit eingebetteten Diskontinuitäten (embedded discontinuities), die Ansätze für Dehnungs- bzw. Verschiebungssprünge auf Elementebene definieren und gegebenenfalls lokal kondensieren. Ein Hauptnachteil dieser Herangehensweise liegt jedoch in der gegenseitigen Abhängigkeit der Ansatzableitungen an den Ufern der Diskontinuität. Klassifizierungen und Bewertungen dieser Methoden sind unter anderem bei Jirásek in [50] und in den Arbeiten von Oliver und Huespe [47, 71] zu finden.

Eine alternative Vorgehensweise verwendet das von Melenk und Babuška entwickelte Partition-of-Unity-Konzept [63] und wird als Erweiterte-Finite-Element-Methode (XFEM) in den Arbeiten von Moës [64], Daux [27], Sukumar [96] und Belytschko [15] bezeichnet. Die Partition-of-Unity-Methode erlaubt die gezielte Konstruktion geeigneter Ansatzräume für die zu lösende partielle Differentialgleichung. Eine zweckmäßig erweiterte Finite-Element-Basis ist zum Beispiel in der Lage, Sprünge in der Lösungsfunktion und in deren Ableitung darzustellen. Mit Hilfe zusätzlicher Freiwerte ist ein unabhängiger Funktionsverlauf jenseits und diesseits der Diskontinuität frei einstellbar.

3.2.1 Partition-of-Unity-Konzept

Eine Menge von Funktionen N_k heißt Partition of Unity (PU), wenn

$$\sum_k N_k(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.1)$$

erfüllt ist, wobei \mathbf{p} eine Polynomialbasis vom Grad n darstellt. In einer Gewichtete-Residuen-Formulierung sind diese Funktionen als Ansatzfunktionen in der Lage, eine analytische Lösung bis zum Polynomgrad n exakt abzubilden. Partition-of-Unity-Methoden [63, 6] verwenden die PU-Funktionen jedoch nicht allein als Ansatzfunktionen, sondern reichern den Approximationsraum mit einer weiteren Basis \mathbf{g} an und wählen einen Ansatz der Form

$$u_{PU}^h(\mathbf{x}) = \sum_k N_k(\mathbf{x}) \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{u}}_k \quad (3.2)$$

mit modifizierten Approximationseigenschaften. Die Basis \mathbf{g} kann mit Lagrange- und Taylorpolynomen, trigonometrischen Funktionen oder anderen geeigneten Ausdrücken gebildet werden. Ein Vorauswissen über spezielle Lösungseigenschaften fließt zweckmäßigerweise in die Wahl von \mathbf{g} ein. Der PU-Ansatz ist in eine Anreicherungsform überführbar, wenn mit

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ \psi \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{u}}_k = \begin{bmatrix} \hat{u}_k \\ \hat{u}_k^* \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

die durch alle Ansatzfunktionen N_k gebildete Standardapproximation um die Produkte $N_k\psi$ erweitert wird. Die folgende Darstellung ist auf eine Anreicherungsfunktion ψ beschränkt, die den Standardansatz (1.37) modifiziert und im gesamten Gebiet ($\mathcal{N}^{\text{ext}} = \mathcal{N}^{\text{std}}$) die angereicherte Approximation

$$u_{\text{ext}}^h(\mathbf{x}) = \sum_{k \in \mathcal{N}^{\text{std}}} N_k(\mathbf{x}) \hat{u}_k + \sum_{j \in \mathcal{N}^{\text{ext}}} N_j(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \hat{u}_j^* \quad (3.4)$$

mit zusätzlichen Koeffizienten \hat{u}_j^* bildet.

Ist das zu erfassende Lösungscharakteristikum nur in einem beschränkten Teil des Berechnungsgebietes präsent, kann der Einsatz einer lokalen Partition-of-Unity-Methode [64] zweckmäßig sein. Die Approximation (3.4) verwendet in diesem Fall nur in einer Umgebung ($\mathcal{N}^{\text{ext}} \subset \mathcal{N}^{\text{std}}$) der besonderen Lösungsausprägung erweiterte Ansatzfunktionen. Der numerische Aufwand wird erheblich reduziert, da nur dort zusätzliche Freiheitsgrade \hat{u}_j^* einzuführen sind, wo der Beitrag einer geeignet erweiterten Basis die Approximationsgüte des Ansatzes steigert. Der Ansatzraum der lokalen Partition-of-Unity-Methode

$$\mathcal{V}_{\text{ext}} = \mathcal{V}_{\text{std}} \otimes \bigcup_{j \in \mathcal{N}^{\text{ext}}} N_j(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \quad (3.5)$$

vereinigt die im gesamten Gebiet Ω definierten Standardansätze mit der Menge der lokal und nur in einem Teilgebiet Ω^{ext} eingeführten erweiternden Ansatzfunktionen. Bild 3.1 zeigt schematisch die Definitionsbereiche von standardmäßigen und erweiternden Ansatzfunktionen.

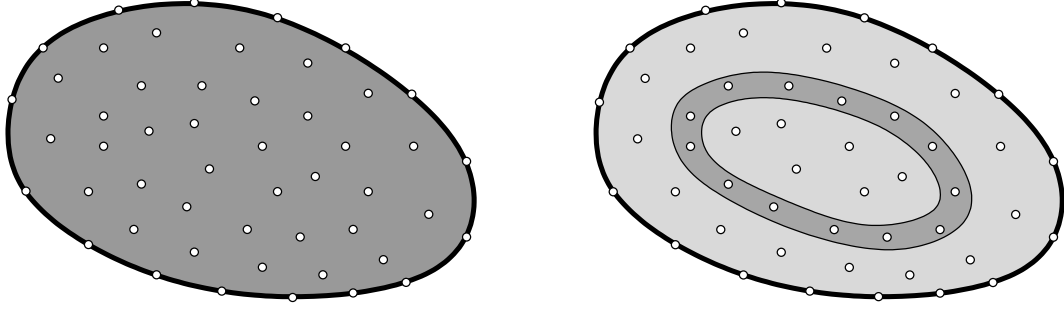


Bild 3.1: Globale und lokale PU: Erweiterung der Standardbasis im gesamten Gebiet (a) bzw. nur in einem Teilgebiet (b).

Geeignete Anreicherungsfunktionen ψ sind in Abhängigkeit der Lösungseigenschaften zu wählen. Deren Charakteristiken und der Ort ihres Auftretens sind für viele randgekoppelte Mehrfeldaufgaben a priori bekannt. Dazu zählen die in dieser Arbeit behandelten bewegten Kontaktdiskontinuitäten. Weitere physikalische Phänomene, für die ein Vorauswissen über das qualitative Lösungsverhalten existiert, sind in Abschnitt 1.1 besprochen. Ursache für diskontinuierliche Beschreibungsgrößen sind in diesem Fall sprunghaft wechselnde Materialeigenschaften, spezielle Übergangsbedingungen oder singuläre Einwirkungen am Kopplungsrand. Von wesentlichem Interesse bei der numerischen Lösung solcher Aufgaben ist die Vermeidung unphysikalischer Lösungen (z.B. Oszillationen oder unzulässige Wertebereiche der Beschreibungsgrößen). Da an der räumlich und zeitlich veränderlichen Kopplungsfläche Sprünge und Knicke im Lösungsverlauf auftreten können, die mit polynomialen Ansatzfunktionen nur unzureichend approximierbar sind, wird das lokale PU-Konzept zur Anreicherung einer polynomialen Standardbasis in einer Umgebung des Kopplungsrandes eingesetzt.

3.2.2 Wahl der Anreicherungsfunktion

Die konsistente Konstruktion eines angepassten Ansatzraumes für lokal C_0 - und C_1 -unstetige Lösungsverläufe gelingt im Rahmen des PU-Konzeptes bei der Verwendung geeigneter Anreicherungsfunktionen $\psi(\mathbf{x})$. Belytschko et al. [15] und Dolbow [29] setzen zur Realisierung diskontinuierlicher Verläufe skalar- und vektorwertiger Funktionen Heaviside- und Betragsfunktion ein. Die Nullniveau-Menge einer Level-Set-Funktion (Abschnitt 2.2) liefert Informationen über die Kontaktfläche im Gebiet. Aufbauend auf

dieser Kenntnis über den Ort der zu erwartenden Diskontinuität, kann nun problemabhängig ein erweiterter Ansatz konstruiert werden, der in der Lage ist, Sprünge und Knicke in den Verläufen der Beschreibungsvariablen an dieser Stelle abzubilden. Auf diese Weise sind Level-Set-Methode und lokaler Partition-of-Unity-Ansatz miteinander verknüpft.

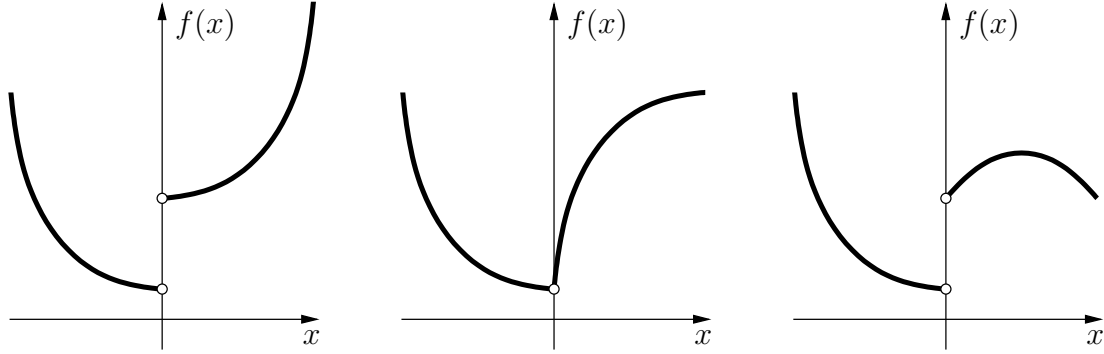


Bild 3.2: Diskontinuierliche Lösungen: C_0 (a), C_1 (b) und C_0 -/ C_1 (c).

In dieser Arbeit stehen C_0 - und C_1 -diskontinuierliche Lösungsverläufe im Vordergrund. Das physikalische Modell der Aufgabenstellung definiert, ob Sprünge und Knicke separat auftreten oder in Kombination (siehe Bild 3.2). In Anlehnung an Belytschko et al. [15] wird zur Modellierung von Ansätzen mit C_0 -Diskontinuitäten die Signumfunktion der Level-Set-Funktion ϕ als Anreicherungsfunktion

$$\psi^{C_0}(\mathbf{x}) = \text{sign } \phi \quad (3.6)$$

verwendet. Die Anreicherungsfunktion $\psi^{C_0}(\mathbf{x})$ besitzt bei $\phi(\mathbf{x}) = 0$ eine Sprungstelle und nimmt ansonsten das Vorzeichen der Level-Set-Funktion an. Die Definition der knotenspezifischen Anreicherungsfunktion

$$\psi_j(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}_j) \quad (3.7)$$

erhält die knoteninterpolative Eigenschaft der Approximation $u^h(x_i) = \hat{u}_i$ und ermöglicht die vereinfachende Berücksichtigung von Knotenrandbedingungen.

Im Fall einer alleinigen Anreicherung auf C_1 -Diskontinuitäten mit nichtkonstanten Anreicherungsfunktionen $\psi(\mathbf{x})$ treten im Bereich des Übergangs von lokal angereicherter zu standardmäßiger Approximation störende Terme auf, die die Qualität der Lösung verschlechtern und sogar die Konvergenz verhindern können. Chessa [24] schlägt für diesen Fall speziell entwickelte Übergangselemente (blending elements) vor, bei denen der Polynomgrad der Standardansätze so gewählt ist, daß genau jene Störterme höherer Ordnung entfallen. Das Vorgehen ist jedoch mit zusätzlichem Aufwand (Freiwerte, Umsetzung) verbunden, der nicht unmittelbar der Erfassung diskontinuierlicher Lösungsverläufe und somit der geeigneten Beschreibung physikalischer Phänomene dient.

Als Alternative zu Übergangselementen wird daher die folgende Herangehensweise zur Modellierung von C_1 -Unstetigkeiten vorgestellt, die für finite Raum-Zeit-Elemente in Abschnitt 3.2.3 eine Spezialisierung erfährt. An allen Knoten j , deren Träger von der Kontaktfläche geschnitten wird, sind zusätzliche Ansatzfunktionen mit der Anreicherungsfunktion (3.6) definiert. Der Funktionsverlauf kann nun potentiell einen Sprung an der Kontaktfläche aufweisen und besitzt abseits davon durch Gleichung (3.4) den polynomialen Grad der Standardapproximation. Die gewonnene Freiheit eines diskontinuierlichen Verlaufes führt dazu, daß dies- und jenseits der mit der Level-Set-Funktion markierten Grenzfläche die Lösung frei einstellbar ist. Das schließt die erwünschte Möglichkeit eines Gradientensprungs ein. Bei ausschließlich C_1 -unstetigen Lösungen ist die C_0 -Kontinuität des Funktionsverlaufs sicherzustellen. Die Erzwingung kontinuierlicher Lösungen ist mit Hilfe eingebetteter Lagrangescher Multiplikatoren möglich, deren Funktionsweise in Abschnitt 3.3.1 erläutert ist.

3.2.3 Diskretisierung mit finiten Raum-Zeit-Elementen

Die Kombination von Level-Set-Methodik, lokaler Partition-of-Unity-Anreicherung und finiten Raum-Zeit-Elementen eröffnet die Möglichkeit, in eleganter Weise zeitveränderliche Lösungsdiskontinuitäten auf einer topologisch unveränderten Diskretisierung des Berechnungsgebietes zu beschreiben.

Die Basis einer erweiterten Approximation der gesuchten Lösungsfunktion $u(\mathbf{x}, t)$ in Raum und Zeit

$$u_{\text{ext}}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{k \in \mathcal{N}^{\text{std}}} N_k(\mathbf{x}, t) \hat{u}_k + \sum_{j \in \mathcal{N}^{\text{ext}}} N_j(\mathbf{x}, t) \psi_j(\mathbf{x}, t) \hat{u}_j^* \quad (3.8)$$

entspricht der Summe der an allen Knoten $k \in \mathcal{N}^{\text{std}}$ des Raum-Zeit-Gebietes Q definierten Standardapproximation und den lokal an den Knoten $j \in \mathcal{N}^{\text{ext}}$ eingeführten anreichernden Ansatzfunktionen. Freiwerte der Approximation sind die Koeffizienten \hat{u}_k und die zusätzlichen Unbekannten \hat{u}_j^* der Anreicherung.

Die knotenweise definierte raumzeitliche Anreicherungsfunktion

$$\psi_j(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, t) - \psi(\mathbf{x}_j, t_j) \quad (3.9)$$

nimmt für die in Abschnitt 3.2.2 beschriebene Herangehensweise der kombinierten C_0 -/ C_1 -Anreicherung nach geeigneter Normierung die Form

$$\psi_j(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (1 - \text{sign } \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \text{sign } \phi(\mathbf{x}_j, t_j)) \quad (3.10)$$

an und bringt die zeitabhängige Lage der Diskontinuität durch die in Raum und Zeit definierte Level-Set-Funktion in das Anreicherungskonzept ein. Die Ableitungen des

erweiterten Ansatzes sind mit Ausnahme der Grenzflächenpunkte im gesamten Träger definiert. Die ersten Ableitungen des angereicherten Ansatzes nach den globalen Raum- bzw. Zeitkoordinaten lauten

$$\frac{\partial}{\partial x_d} u_{\text{ext}}^h = \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial x_d} \hat{u}_k + \sum_j \left(\frac{\partial N_j}{\partial x_d} \psi_j + N_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x_d} \right) \hat{u}_j^*, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\text{ext}}^h = \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial t} \hat{u}_k + \sum_j \left(\frac{\partial N_j}{\partial t} \psi_j + N_j \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \right) \hat{u}_j^* \quad (3.12)$$

und vereinfachen sich mit den verschwindenden Ableitungen der Anreicherungsfunktion (3.10) $\psi_{j,x_d} = 0$ und $\psi_{j,t} = 0$ zu Ausdrücken der Form

$$\frac{\partial}{\partial x_d} u_{\text{ext}}^h = \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial x_d} \hat{u}_k + \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial x_d} \psi_j \hat{u}_j^*, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\text{ext}}^h = \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial t} \hat{u}_k + \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial t} \psi_j \hat{u}_j^*, \quad (3.14)$$

für deren Berechnung die Ableitungen der Standardansätze und der Funktionswert der knotenweisen Anreicherungsfunktion ψ_j zu bestimmen sind. Die Bildung höherer Raum- und Zeitableitungen folgt dem selben Schema.

Nebenstehend ist die Konstruktion einer zusätzlichen Ansatzfunktion am Knoten j für den eindimensionalen Fall bildlich dargestellt. Das Null-Niveau der Level-Set-Funktion ϕ befindet sich im Träger des Knotens und somit auch die Kontaktstelle. Die lineare Standardansatzfunktion N_j und die nach Vorschrift (3.10) mit Hilfe der Level-Set-Funktion gebildete Anreicherungsfunktion ψ_j führen auf den erweiterten Ansatz $N_j \psi_j$ am Knoten j . Der Funktionswert an der Stelle x_j ist trotz Anreicherung identisch mit dem Freiwert des Standardansatzes N_j . Die Bildung der ersten Ableitung gelingt mit N_j' und ψ_j . Da das Null-Niveau von ϕ ebenso den Träger des Knotens rechts von j schneidet, sind auch an diesem Knoten zusätzliche Ansatzfunktionen zu definieren.

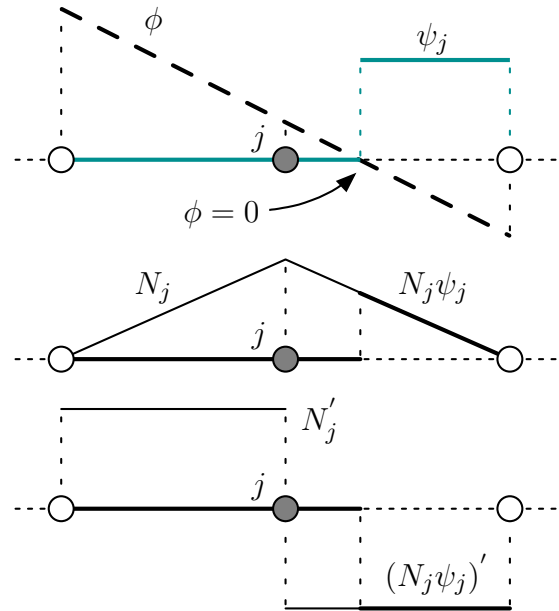


Bild 3.3: Bildung des erw. Ansatzes.

Für ein Dreieck-Element mit linearen Standardansätzen sind in Bild 3.4 die Verläufe der anreichernden Ansatzfunktionen neben den Standardansätzen angegeben. Im Element definiert die Level-Set-Funktion die individuelle Form der zusätzlichen Ansatzfunktionen. Der in der Abbildung jeweils dunkel gefärbte Knoten markiert die Zuordnung von dargestellter Ansatzfunktion und Freiheitsgrad. Wie der Abbildung zu entnehmen ist, treten bei Koinzidenz von Grenzfläche und Elementkante bzw. -knoten auf Ebene des Elementes linear abhängige Ansatzfunktionen oder Ansätze identisch Null auf. Für gebietweit definierte Beschreibungsgrößen stellen diese Situationen keinen pathologischen Grenzfall dar, da global sämtliche Ansatzfunktionen linear unabhängig sind. Im Fall ausschließlich auf Elementebene formulierter Größen sind die überzähligen Ansätze aus der Anreicherung zu entfernen, der zugeordnete Freiwert ist Null.

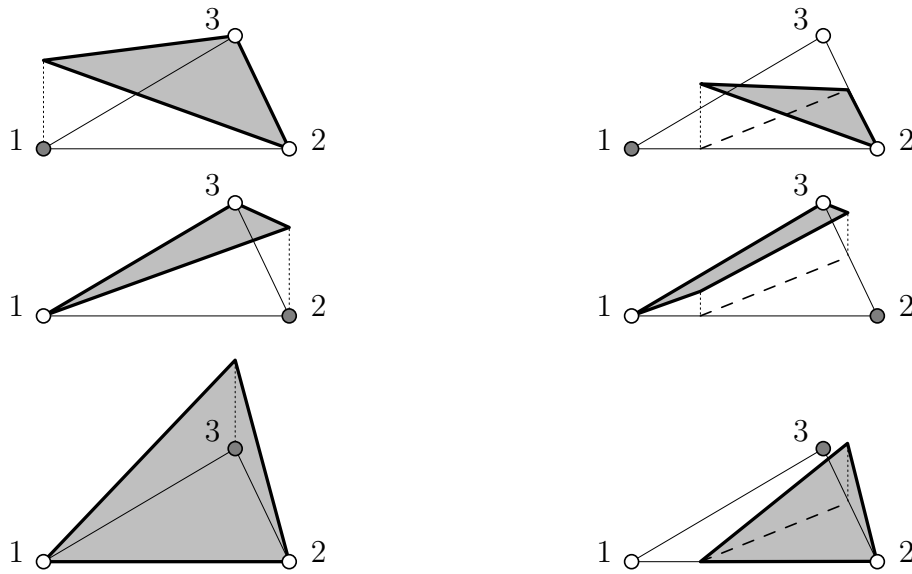


Bild 3.4: Dreieck-Element: lineare Standardansätze (a) und Anreicherung (b) für linear interpolierte Level-Set-Funktion mit Knotenvektor $\hat{\phi} = (1.4, -1.3, 1.3)$.

Bild 3.5 zeigt das 6-Knoten-Raum-Zeit-Prismen-Element und eine mögliche Lage der Grenzfläche im Element. Die Anreicherung der raumzeitlichen Ansatzfunktionen erlaubt die Erfassung eines räumlich unstetigen Funktionsverlaufs in der Zeit. Die darstellbare Form der Diskontinuität hängt von der Ansatzordnung der Level-Set-Funktion ab und kann als Folge des verwendeten linearen Produktansatzes krümmungsbehaftet sein.

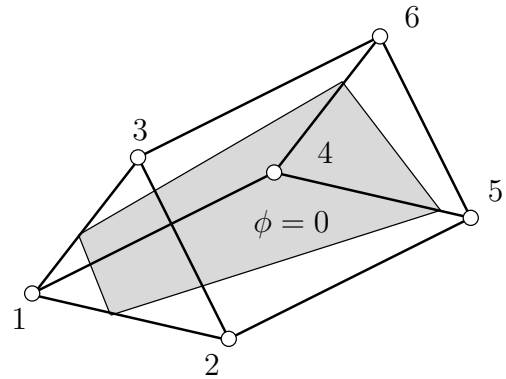


Bild 3.5: Prismen-Raum-Zeit-Element.

In der zeitlichen Entwicklung kann die Unstetigkeitsfläche im Element verbleiben oder es verlassen. Die Position der Diskontinuität folgt aus der Lösung der Level-Set-Funktion. Mit dem vorgestellten Anreicherungsansatz für finite Raum-Zeit-Elemente ist es möglich, diskontinuierliche Lösungen in ihrem zeitlichen Verlauf auch bei einem räumlichen Wechsel über mehrere Elemente hinweg zu modellieren (siehe Bild 3.6).

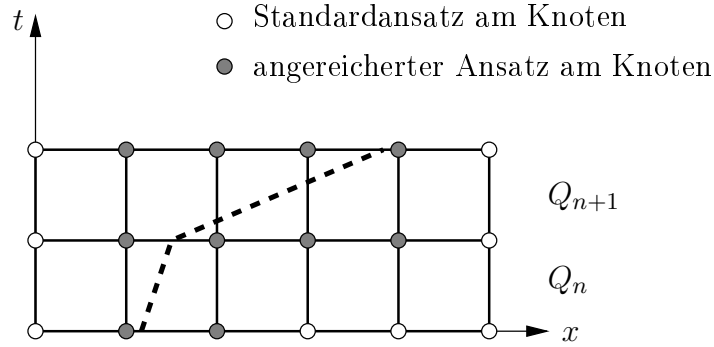


Bild 3.6: Entwicklung unstetiger Lösungen über mehrere Raum-Zeit-Elemente.

Gerade für grenzflächensensitive Aufgabenstellungen, bei denen unstetige Beschreibungsgrößen an einem bewegten Kopplungsrand auftreten, der schnellen und häufigen Lageänderungen unterworfen ist, kann die vorgestellte Methodik eine robuste Alternative zu den Ansatzraum nicht modifizierenden Verfahren darstellen, die die Physik der Grenzfläche „verschmieren“.

3.2.4 Numerische Integration der modifizierten Ansätze

Elemente mit erweiterten Ansatzfunktionen bedürfen einer besonderen Behandlung bei der numerischen Integration der zugrundeliegenden Variationsformulierung. Die Anreicherungsfunktion ψ bestimmt wesentlich den Charakter des Integranden. In Abschnitt 3.2.3 ist mit Gleichung (3.10) ψ als C_0 -unstetige Funktion zur Modellierung von C_0 -/ C_1 -Diskontinuitäten eingeführt worden. Die resultierenden Ansatzfunktionen und somit die Integranden der Bestimmungsgleichungen sind entlang der Grenzfläche mit $\phi = 0$ diskontinuierlich. Mittelwertformeln (z.B. Gauß-Verfahren) zeigen für solche Funktionen in der Regel kein monotonen Konvergenzverhalten, auch wenn abseits der Unstetigkeitsstelle polynomiale Funktionsverläufe vorliegen (Bild 3.7). Interpolationsquadraturen mit äquidistanten Stützstellen (Rechteckformel, Trapezformel) sind im Hinblick auf diskontinuierliche Integranden deutlich robuster, jedoch von geringer Fehlerordnung.

Die numerische Integration angereicherter Ansatzfunktionen im finiten Element erfolgt durch Unterteilung des Elementgebietes und anschließende Quadratur über die

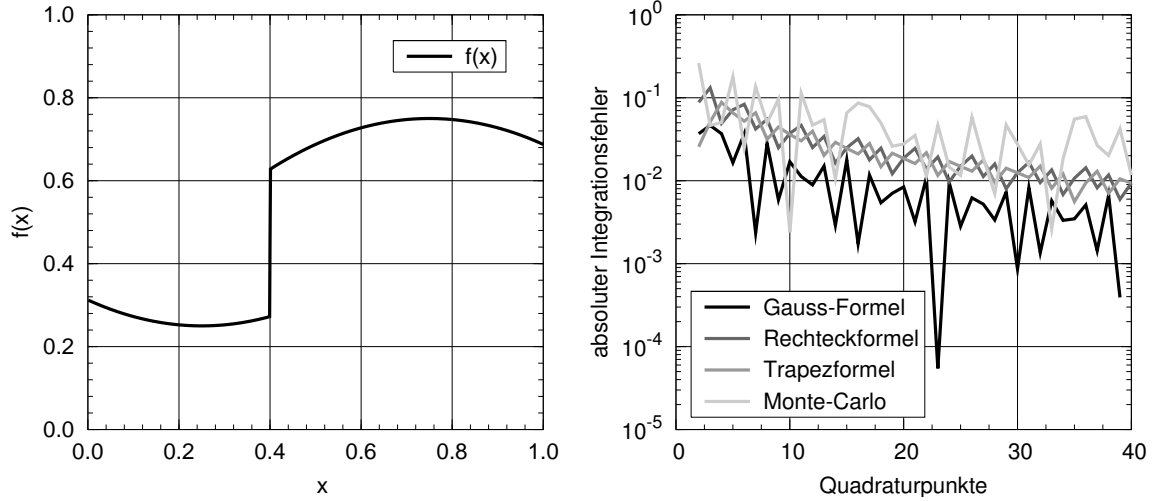


Bild 3.7: Quadratur unstetiger Funktionen: diskontinuierlicher Integrand $f(x)$ (a) und Fehlerkonvergenz des numerisch ausgewerteten Integrals $\int_0^1 f dx$ (b).

Teilgebiete. Die Null-Isokontur der Level-Set-Funktion ϕ teilt das Elementgebiet in Bereiche, in denen sämtliche Ansatzfunktionen stetig verlaufen und polynomiale Integranden mit dem Gaußschen Integrationsverfahren exakt bestimmt werden können. Jedes betroffene Element erfährt unter Beachtung der Grenzfläche bei $\phi = 0$ eine Unterteilung in geometrische Primitiva \mathcal{P}_i , so daß

$$Q_e = Q_e^+ \cup Q_e^-, \quad (3.15)$$

$$\text{mit } Q_e^+ = \cup \mathcal{P}_i^+ \quad \text{und} \quad Q_e^- = \cup \mathcal{P}_i^-, \quad (3.16)$$

das Elementgebiet diesseits und jenseits der Grenzfläche der Vereinigung der Primitiva \mathcal{P}_i^+ bzw. \mathcal{P}_i^- entspricht. Die diskrete Grenzfläche im Element liegt nun als Menge der Seitenflächen \mathcal{E}_i jener Primitiva vor, für die

$$\cup \mathcal{E}_i = (\cup \mathcal{P}_i^+) \cap (\cup \mathcal{P}_i^-) \quad (3.17)$$

gilt. Das Bild 3.8 illustriert die in einem ersten Schritt durchgeführte formale Unterteilung eines Raum-Zeit-Prismenelementes in Simplexe. Die Zerlegung liefert Tetraeder im diskreten Raum-Zeit-Elementgebiet und Dreiecke für das räumliche Gebiet des Zeitscheibenanfangs und -endes. Anschließend erfolgt die Lokalisierung der Grenzfläche in allen Simplexen und deren weitere Teilung entlang des Level-Set-Nullniveaus. Die simplexweise Unterteilung setzt ein rekursiver Algorithmus um, der sich an dem von Lorensen eingeführten Marching-Cubes-Verfahren [60] orientiert. Die Teilung ist bei linearem Verlauf der Grenzfläche exakt ausführbar und fällt hinsichtlich des numerischen Aufwandes kaum ins Gewicht.

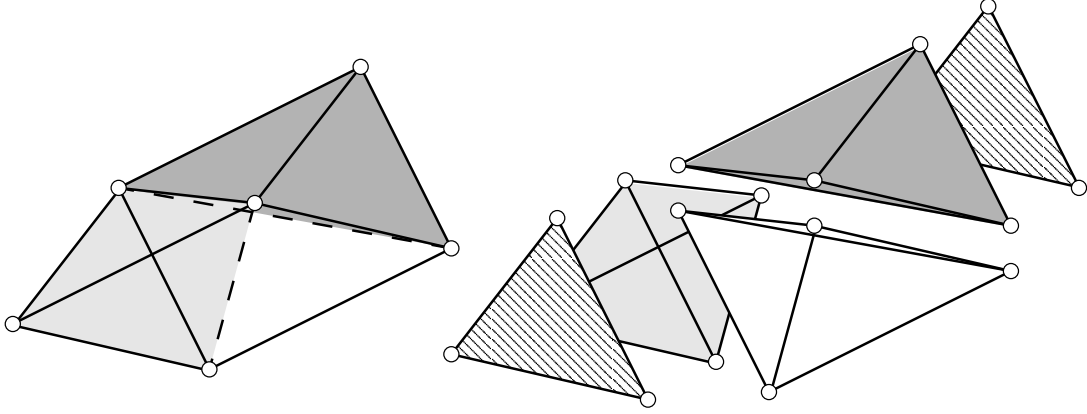


Bild 3.8: Integration: Unterteilung des Raum-Zeit-Prismenelementes in Simplexe.

Das Integral einer entlang der Grenzfläche diskontinuierlichen Funktion f über das Elementgebiet ist mit

$$\int_{Q_e} f(\mathbf{x}, t) \, dQ = \int_{Q_e^+} f(\mathbf{x}, t) \, dQ + \int_{Q_e^-} f(\mathbf{x}, t) \, dQ \quad (3.18)$$

$$= \sum_{i=1}^{|\mathcal{P}^+|} \int_{\mathcal{P}_i^+} f(\mathbf{x}, t) \, d\mathcal{P}_i + \sum_{i=1}^{|\mathcal{P}^-|} \int_{\mathcal{P}_i^-} f(\mathbf{x}, t) \, d\mathcal{P}_i \quad (3.19)$$

als Summe von Teilintegralen über die Primitiva definiert. Das Gaußsche Quadraturverfahren liefert für die Integrale $\int f \, d\mathcal{P}_i$ mit polynomialen Integranden f exakte Ergebnisse. Die Anzahl der erforderlichen Integrationspunkte im Subelement ist abhängig von der Ansatzordnung der zu integrierenden Funktion zu wählen [95].

3.3 Einbringen von Übergangsbedingungen

Das in Abschnitt 3.2.2 beschriebene Anreicherungskonzept realisiert die formale Entkopplung des Verlaufs der Beschreibungsvariablen entlang einer bewegten Grenzfläche. Bei randgekoppelten Mehrfeldaufgaben liegen auf der gemeinsamen Grenzfläche Kopplungsbedingungen (1.33) und (1.34) vor, die in der Regel nicht von den Ansätzen a priori erfüllt werden. Die gewichtete Integralformulierung (1.35g) und (1.35h) der Kopplungsbedingungen verwendet die Interfacespannung \mathbf{t} als Lagrangeschen Multiplikator. Die Übergangsbedingungen für Masse- und Impulsbilanz am Interface sind schwach erfüllt. Zusätzlich ist eine Aussage über die Größe der Zwangskraft zur Realisierung der Kopplungsbedingungen verfügbar. Der Lagrange-Multiplikator stellt bei Bedarf die C_0 -Kontinuität des Funktionsverlaufs am Kopplungsrand her. Die Möglichkeit C_1 -unstetiger Lösungen am Interface bleibt dabei erhalten.

3.3.1 Lagrange-Multiplikator-Formulierung

Der Vektor der Interfacespannung \mathbf{t} ist als Lagrange-Multiplikator auf der raumzeitlichen Grenzfläche R definiert. Die Approximation der Interfacespannung kann infolge der impliziten Beschreibungsweise der Kopplungsfläche nicht auf einem explizit gegebenen Rand erfolgen.

Die Idee der impliziten Formulierung der Grenzflächengeometrie wird an dieser Stelle aufgegriffen und zur Definition des Lagrangeschen Multiplikators eingesetzt. Es sei $\tilde{\mathbf{t}}$ eine in der Umgebung von R definierte vektorwertige Funktion, für die

$$\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) \delta(\phi(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{t}_1(\mathbf{x}, t) \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in Q_1, \quad (3.20)$$

$$\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) \delta(\phi(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{t}_2(\mathbf{x}, t) \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in Q_2 \quad (3.21)$$

gilt, mit $\delta(\phi)$ als Dirac-Deltafunktion (2.9) der Level-Set-Funktion. Die Zwangsgröße \mathbf{t}_1 in den Termen (g) und (h) der gewichteten Integralform (1.35) wird auf diese Weise mit Hilfe der Level-Set-Funktion und dem implizit und raumzeitlich verteilt formulierten Lagrange-Multiplikator $\tilde{\mathbf{t}}$ beschrieben.

Für den impliziten Lagrangeschen Multiplikator $\tilde{\mathbf{t}}$ gilt nach (3.8) der angereicherte Ansatz

$$\tilde{\mathbf{t}}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{j \in \mathcal{N}^{\text{ext}}} N_j(\mathbf{x}, t) \tilde{\mathbf{t}}_j + \sum_{j \in \mathcal{N}^{\text{ext}}} N_j(\mathbf{x}, t) \psi_j(\mathbf{x}, t) \tilde{\mathbf{t}}_j^* \quad (3.22)$$

mit der Anreicherungsfunktion nach Gleichung (3.10), so daß ein unterschiedlicher Interfacespannungszustand jenseits und diesseits des Kopplungsrandes mit den Gleichungen (3.20) und (3.21) erfaßt werden kann. Der Ansatz ist nur in jenen Elementen e_R definiert, die von der Grenzfläche R geschnitten werden (siehe Bild 3.9) und daher von lokalem Charakter. Die Unbekannten $\tilde{\mathbf{t}}_j$ und $\tilde{\mathbf{t}}_j^*$ sind nur an den von der Anreicherung betroffenen Knoten $j \in \mathcal{N}^{\text{ext}}$ zusätzlich einzuführen und zu bestimmen.

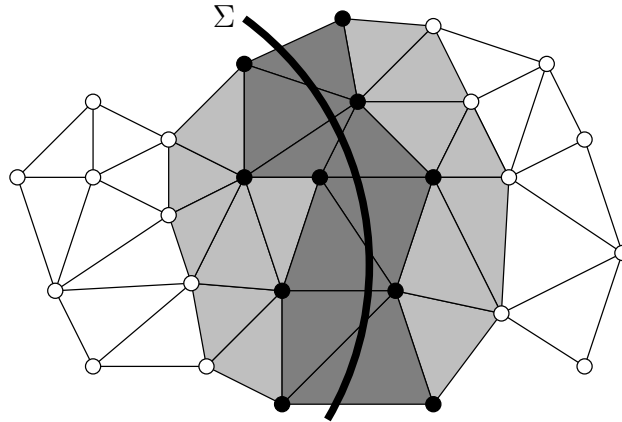


Bild 3.9: Grenzflächenelemente e_R (dunkel) und Definitionsbereich lokale PU (hell).

Die stabilisierte Raum-Zeit-Formulierung der Übergangsbedingungen auf der Grenzfläche R für die Zeitscheibe Q_n ist mit dem impliziten Lagrange-Multiplikator $\tilde{\mathbf{t}}$ wie folgt festgelegt

$$+ \int_{R_n^\chi} \delta \tilde{\mathbf{t}}_1^\chi \cdot (\rho^\chi \mathbf{v}_1^a - \rho^\chi \mathbf{v}_2^a) \, dR^\chi \quad (3.23a)$$

$$- \int_{R_n^\chi} \delta(\rho_1^\chi \mathbf{v}_1^a) \cdot \tilde{\mathbf{t}}_1^\chi \, dR^\chi + \int_{R_n^\chi} \delta(\rho_2^\chi \mathbf{v}_2^a) \cdot (\tilde{\mathbf{t}}_1^\chi - \mathbf{N}^T \tilde{\mathbf{t}}) \, dR^\chi \quad (3.23b)$$

$$+ \sum_{e_R} \int_{Q_n^\chi} (\delta \, {}^x \mathbf{P}^\chi \cdot \mathbf{n}^\chi - \delta \tilde{\mathbf{t}}) \tau_K ({}^x \mathbf{P}^\chi \cdot \mathbf{n}^\chi - \tilde{\mathbf{t}}) \, dQ^\chi. \quad (3.23c)$$

Die Zeilen (3.23a) und (3.23b) zeigen die Variationsformulierung der Übergangsbedingungen (1.33) und (1.34) mit der implizit formulierten Interface-Randspannung $\tilde{\mathbf{t}}$ nach partieller Integration der Impulsbilanz. Die numerische Integration erfolgt auf der diskreten Grenzfläche, die in jedem Element lokal bestimmbar ist (Abschnitt 3.2.4). Die Interface-Randspannung ist mit dem in Zeile (3.23c) angegebenen Galerkin-/Least-Squares-Term stabilisiert, in den die aus der Level-Set-Funktion mit Gleichung (2.6) bzw. Gleichung (2.32) gewonnene lokale Approximation der Normale des Kopplungsrandes eingeht. Die Stabilisierung sichert die Bestimmtheit des impliziten Multiplikators. Sie entspricht formal einer gestörten Lagrange-Multiplikator-Formulierung [13] (perturbed Lagrangian multiplier), die einen mit dem Faktor α gewichteten Term zusätzlich verwendet. In der diskreten Umsetzung führt diese Vorgehensweise zu einer von Null verschiedenen Hauptdiagonale des Lagrange-Multiplikators. Der elementweise definierte Stabilisierungsparameter τ_K wird mit

$$\tau_K = \alpha h^2 \quad (3.24)$$

ermittelt und strebt bei kleiner werdenden charakteristischen Elementabmessungen h gegen Null. Der Parameter α ist in Abhängigkeit von der konkreten Aufgabe und den Eigenschaften des Gleichungssystems zu wählen; üblicherweise in der Größenordnung zwischen 10^{-4} und 10^{-8} .

3.4 Lösungsstrategie für das gekoppelte Gesamtsystem

Das Verhalten randgekoppelter Körper ist mit Modellgleichungen für die Physik und die Bewegung des Kopplungsrandes beschrieben, die untereinander in starker Wechselwirkung stehen können. Die Modellgleichungen sind im Allgemeinen nichtlinear, wenn zum Beispiel der aktuelle Geschwindigkeits- oder Verschiebungszustand das Verhalten beeinflusst. Sie sind weiterhin von der Lage der Grenzfläche abhängig, die mit Lösung der Level-Set-Gleichung vorliegt. In der Level-Set-Gleichung ist wiederum das

momentane Vektorfeld der Geschwindigkeiten im Gebiet berücksichtigt. Jede physikalisch motivierte Änderung der Gebietsdiskretisierung (z.B. explizite Netzbewegungen bei Fluid-Struktur-Wechselwirkungen) führt auf zusätzliche Nichtlinearitäten in den Modellgleichungen, da diese auf dem veränderlichen Raum-Zeit-Gebiet zu integrieren sind. Eine weitere Nichtlinearität entsteht mit der Verwendung angereichernder Ansatzfunktionen, die von der Level-Set-Funktion und ihrer Nullstelle abhängig sind.

Die simultane Lösung der Modellgleichungen aller Kontinua setzt die in dieser Arbeit angestrebte ganzheitliche Betrachtung randgekoppelter Mehrfeldaufgaben konsequent um. Die nichtlinearen Bestimmungsgleichungen einer Zeitscheibe Q_n

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_n(\hat{\mathbf{x}}_n, \hat{\phi}_n) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{L}}_n(\hat{\mathbf{x}}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_n \\ \hat{\phi}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}_n(\hat{\mathbf{x}}_n, \hat{\phi}_n) \\ \tilde{\phi}_n(\hat{\mathbf{x}}_n, \hat{\phi}_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

werden mit einem Picard-Iterationsschema [33, 108] behandelt, das die für das sonst übliche Newton-Raphson-Verfahren erforderliche Jacobi-Matrix der Gesamtsystemmatrix nicht benötigt. Hierbei erfolgt die iterative Lösung der linearisierten Gleichungen

$$\hat{\mathbf{K}}_n(\hat{\mathbf{x}}_n^{m-1}, \hat{\phi}_n^{m-1}) \cdot \hat{\mathbf{x}}_n^m = \hat{\mathbf{b}}_n(\hat{\mathbf{x}}_n^{m-1}, \hat{\phi}_n^{m-1}) \quad (3.26)$$

$$\hat{\mathbf{L}}_n(\hat{\mathbf{x}}_n^m) \cdot \hat{\phi}_n^m = \tilde{\phi}_n(\hat{\mathbf{x}}_n^m, \hat{\phi}_{n-1}) \quad (3.27)$$

solange, bis eine geeignete Fehlerschranke unterschritten ist und die physikalischen Zustandsgrößen $\hat{\mathbf{x}}$ und die Level-Set-Funktion $\hat{\phi}$ innerhalb einer Zeitscheibe konvergieren. In der Konsequenz ist die Physik von der Grenzflächenbewegung innerhalb eines Iterationschrittes entkoppelt. Die algorithmische Umsetzung der iterativen Lösung der gekoppelten Modellgleichungen verdeutlicht Bild 3.10.

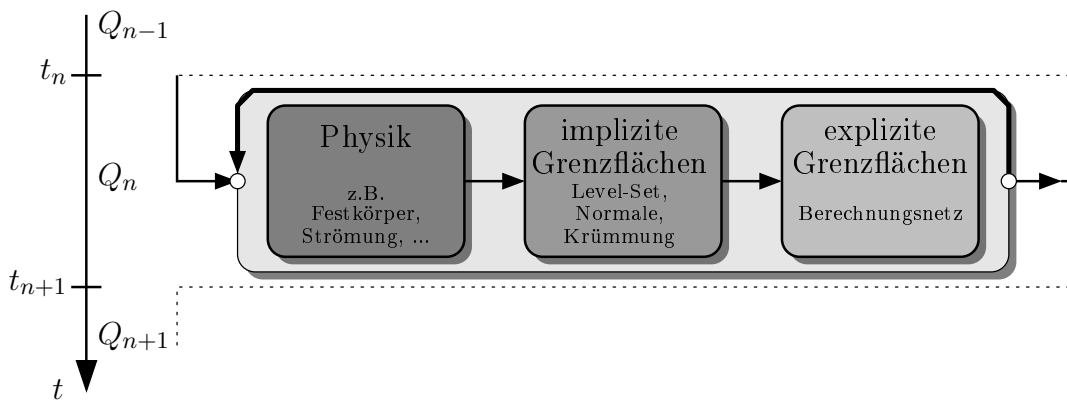


Bild 3.10: Simultane Lösung der gekoppelten nichtlinearen Modellgleichungen.

Innerhalb des m -ten Picard-Iterationsschrittes der Zeitscheibe Q_n erfolgt die Lösung des linearen Systems der diskreten physikalischen Bestimmungsgleichungen, in die der

Zustand am Ende des vorangegangenen Iterationschrittes $(m - 1)$ einfließt. Anschließend werden die aus dem aktuellen physikalischen Zustand folgenden Änderungen der implizit und explizit erfaßten Grenzflächen ermittelt. Im Fall zeitveränderlicher Berechnungsgebiete erfolgt abschließend die Anpassung der Knotenkoordinaten des Netzes (Netzbewegung) mit geeigneten Verfahren, so daß im nachfolgenden Iterationsschritt die Integration aller Modellgleichungen auf dem angepaßten Gebietsnetz erfolgen kann. Nach Abschluß einer Picard-Iteration ist die Abbruchbedingung zu prüfen und bei Nichterfüllung der nächste Iterationsschritt zu beginnen. Mit einer hinreichend konvergenten Lösung sind alle nichtlinearen Einflüsse und Kopplungseffekte berücksichtigt, so daß die Berechnung der folgenden Zeitscheibe Q_{n+1} beginnen kann.

Die numerische Lösung der in den Teilschritten einer Picard-Iteration vorliegenden linearen Gleichungssysteme mit unsymmetrischen Koeffizientenmatrizen $\hat{\mathbf{K}}$ und $\hat{\mathbf{L}}$ erfolgt mit einem vorkonditionierten iterativen Gradientenverfahren (BiCGStab)[106]. Als Vorkonditionierungsmatrix dient im Fall des Physik-Systems (3.26) die vollständige LU-Zerlegung der Matrix $\hat{\mathbf{K}}$. Die Verwendung eines Vorkonditionierers für die diskretisierte Level-Set-Gleichung (3.27) hat sich als nicht notwendig erwiesen.

In den Anwendungen der nachfolgenden Kapitel ist die konvergierte Lösung einer Zeitscheibe in der Regel nach 4 bis 6 Picard-Iterationsschritten gefunden, wenn die Zeitschrittweite an den physikalischen Zeitskalen orientiert ist und die nichtlinearen Abhängigkeiten moderat bleiben.

3.5 Konvergenzuntersuchungen

Die Approximationseigenschaften des vorgestellten Anreicherungskonzeptes für C_0 -/ C_1 -diskontinuierliche Lösungen auf Grundlage des Partition-of-Unity-Ansatzes werden anhand verschiedener Modellsituationen untersucht. Die Güte der numerischen Lösung u^h gibt das Integral des relativen Approximationsfehlers über das Berechnungsgebiet

$$E_{\text{rel}} = \int_Q e_{\text{rel}} \, dQ \quad (3.28)$$

an, worin der lokale relative Fehler mit der Vorschrift

$$e_{\text{rel}} = \frac{\|u^h - u\|}{\|u\|}, \quad (3.29)$$

in der L_2 -Norm formuliert ist. Die räumlich eindimensionalen Modellaufgaben provozieren diskontinuierliche Verläufe einer Beschreibungsgröße. Nach der Analyse stationärer Diskontinuitäten erfolgt die Diskussion eines Beispiels mit bewegter Grenzfläche, d.h. einem unstetigen Funktionsverlauf, der sich mit der Zeit verändert.

Stationäre C_1 -Diskontinuität. Gegeben ist das stationäre System zweier gekoppelter unterschiedlich steifer Dehnstäbe (Bild 3.11) der Länge $L = 0.5 \text{ m}$. Die Bestimmungsgleichungen in Weggrößenformulierung, sowie die Rand- und Übergangsbedingungen sind bei der Annahme linear elastischen mit Materialverhaltens

$$0 = k_1 u_{1,xx} + \gamma_1 \quad \text{für } 0.0 \text{ m} < x < 0.5 \text{ m}, \quad (3.30)$$

$$0 = k_2 u_{2,xx} + \gamma_2 \quad \text{für } 0.5 \text{ m} < x < 1.0 \text{ m}, \quad (3.31)$$

$$0 = u_1(x=0) = u_2(x=1), \quad (3.32)$$

$$0 = u_1(x=0.5) - u_2(x=0.5) \quad (3.33)$$

gegeben. An beiden Stäben greift eine konstante Streckenlast $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ an. Das eindimensionale Stabsystem ist an den Enden gegen Verschiebung gesperrt.

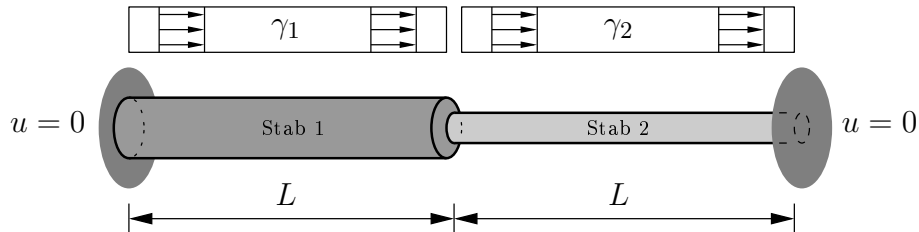


Bild 3.11: System der zusammengesetzten dehnsteifen Stäbe.

Die analytische Lösung der Randwertaufgabe ist

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{(x-0.5)^2}{2k_1} - \frac{(x-0.5)(k_2-k_1)}{4k_1(k_1+k_2)} + \frac{1}{4(k_1+k_2)} & \text{für } 0.0 \text{ m} \leq x \leq 0.5 \text{ m} \\ -\frac{(x-0.5)^2}{2k_2} - \frac{(x-0.5)(k_2-k_1)}{4k_2(k_1+k_2)} + \frac{1}{4(k_1+k_2)} & \text{für } 0.5 \text{ m} \leq x \leq 1.0 \text{ m} \end{cases} \quad (3.34)$$

und besitzt für voneinander verschiedene Steifigkeiten $k_1 \neq k_2$ einen bei $x = 0.5 \text{ m}$ diskontinuierlichen Verschiebungsgradienten. Die in die schwache Form überführte gewichtete Integralform der Bestimmungsgleichungen (3.30)-(3.31) und der Übergangsbedingung (3.33)

$$\sum_{i=1}^2 \int_{L_i} (\delta u_{,x} k_i u_{,x} + \delta u \gamma_i) dx \quad (3.35a)$$

$$+ \left(\delta \tilde{N}_1 (u_1 - u_2) - \delta u_1 \tilde{N}_1 + \delta u_2 \tilde{N}_1 \right) \Big|_{x=0.5} \quad (3.35b)$$

$$+ \sum_{e_R} \int_L \delta (ku_{,x} - \tilde{N}) \tau_K (ku_{,x} - \tilde{N}) dx = 0 \quad \forall \delta u, \delta \tilde{N}, \quad (3.35c)$$

wird unter Verwendung einer linearen Basis nach (1.37) bzw. einer angereicherten linearen Basis nach (3.8) diskretisiert und die Unbekannten des algebraischen Systems diskreter Gleichungen bestimmt. Einen C_0 -kontinuierlichen Lösungsverlauf des angereicherten Ansatzes an der Kontaktstelle erzwingt der implizit formulierte Lagrange-Multiplikator \tilde{N} . Die Diskretisierung des Gebietes erfolgt mit einer geraden Anzahl äquidistanter Stützstellen, so daß die Stelle $x = 0.5 \text{ m}$ der erwarteten C_1 -Diskontinuität exakt zwischen zwei Stützstellen, in der Mitte eines finiten Elementes liegt.

Bild 3.12 zeigt den Verlauf der analytischen Verschiebungslösung u neben den numerisch gewonnenen Lösungen u_{std}^h und u_{ext}^h für die Stützweite $h = 1/11 \text{ m}$ und die Steifigkeiten $k_1 = 1 \text{ N}$ und $k_2 = 0.1 \text{ N}$. Die Standardapproximation mit linearen Ansätzen weist große Abweichungen von der analytischen Lösung im Bereich der kleineren Steifigkeit auf, hervorgerufen durch eine aus der linearen Approximation folgende erhöhte Steifigkeit des Systems rechts vom Steifigkeitssprung. Eine Erhöhung des Verhältnisses k_1/k_2 verschärft diese Problematik. Die angereicherte Basis ist dagegen in der Lage, einen unstetigen Verschiebungsgradienten bei gleichmäßig im Intervall verteiltem Lösungsfehler abzubilden. Für dieses Beispiel stimmt die Lösung der angereicherten Approximation an den Stützstellen mit der analytischen Lösung überein.

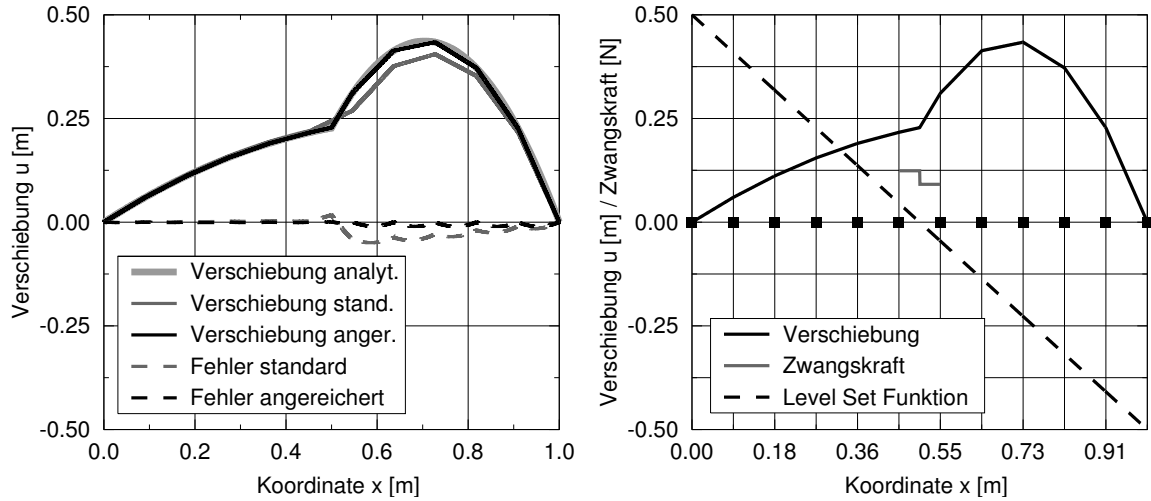


Bild 3.12: C_1 -Diskontinuität: Lösungsverlauf und Fehlerverteilung e_{rel} .

Die Untersuchung des Lösungsverhaltens hinsichtlich des Fehlerintegrals E_{rel} bei Variation der Stützweite h zeigt die Überlegenheit angereicherter Ansätze für diese Aufgabenstellung (Bild 3.13). Der Fehler der linearen Standardbasis konvergiert mit nur erster Ordnung, hervorgerufen durch den C_1 -unstetigen Lösungsverlauf. Die angereicherte Basis auf Grundlage linearer Ansatzfunktionen weist mit nur sechs zusätzlichen Freiheitsgraden (zwei für diskontinuierliche Ansätze, vier für den impliziten Lagrange-Multiplikator) ein Konvergenzverhalten des Approximationsfehlers von zweiter Ordnung auf.

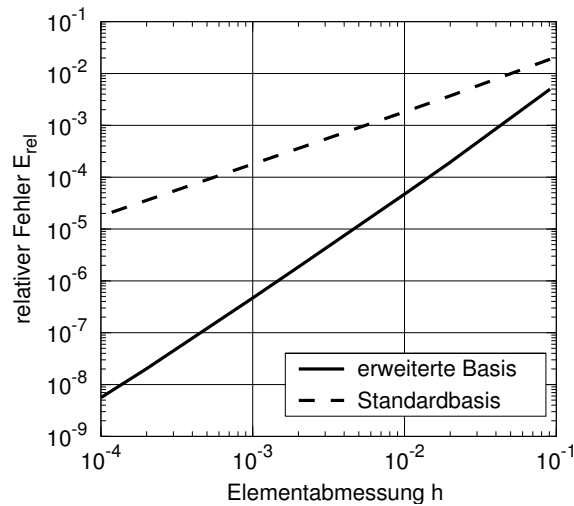


Bild 3.13: C_1 -Diskontinuität: Konvergenzverhalten des Approximationsfehlers E_{rel} .

Die hier behandelte Modellgleichung vom Typ einer Diffusionsgleichung mit unstetig wechselndem Diffusionsparameter stellt einen Grenzfall vieler physikalischer Aufgaben dar. Dazu gehört unter anderem die Scherströmung zweier geschichteter und unterschiedlich viskoser Newtonscher Fluide.

Stationäre C_0 -/ C_1 -Diskontinuität. Gegeben ist das System (Bild 3.14) zweier gekoppelter dehnstarrer Stäbe ($k \rightarrow \infty$) der Länge $L = 0.5 \text{ m}$. Die Bestimmungsgleichungen in gemischter Kraft-Verschiebungs-Formulierung, sowie die Rand- und Übergangsbedingungen für Normalkraft und Verschiebung lauten

$$0 = u_{1,x} , \quad 0 = N_{1,x} + \gamma_1(x) \quad \forall 0.0 \text{ m} < x < 0.5 \text{ m} , \quad (3.36)$$

$$0 = u_{2,x} , \quad 0 = N_{2,x} + \gamma_2(x) \quad \forall 0.5 \text{ m} < x < 1.0 \text{ m} , \quad (3.37)$$

$$0 = u_1(x = 0), \quad (3.38)$$

$$0 = N_2(x = 1), \quad (3.39)$$

$$0 = u_1(x = 0.5) - u_2(x = 0.5), \quad (3.40)$$

$$1 = N_1(x = 0.5) - N_2(x = 0.5), \quad (3.41)$$

mit der linear veränderlichen Linienlast $\gamma_i(x) = \alpha_i(1 - x)$. Die Übergangsbedingungen fordern einen bei $x = 0.5$ kontinuierlichen Verschiebungszustand und einen Normalkraftsprung $\Delta N = 1$ an der Kontaktstelle.

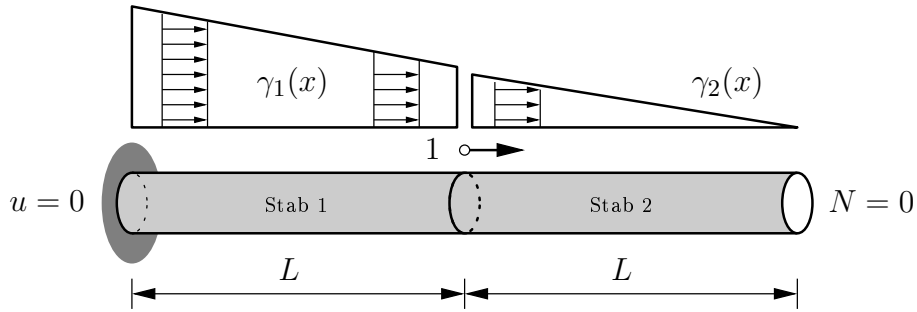


Bild 3.14: System der zusammengesetzten dehnstarrten Stäbe.

Die analytische Lösung der Randwertaufgabe ist für die Normalkraft mit

$$N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}g_1x^2 - g_1x + \frac{1}{8}(g_2 + 3g_1) + 1 & \forall 0.0 \text{ m} \leq x \leq 0.5 \text{ m} \\ \frac{1}{2}g_2(1 - x)^2 & \forall 0.5 \text{ m} \leq x \leq 1.0 \text{ m} \end{cases} \quad (3.42)$$

gegeben und besitzt für voneinander verschiedene Streckenlasten ($\alpha_1 \neq \alpha_2$) und die Normalkraftübergangsbedingung (3.41) einen C_0 -/ C_1 -diskontinuierlichen Verlauf an der Stelle $x = 0.5$. Das im inkompressiblen Limit betrachtete Stabsystem kann Kräfte aufnehmen, ohne einen Verformungszustand hervorzurufen.

Nach Anwendung der Methode der gewichteten Residuen auf die Bestimmungsgleichungen (3.36)-(3.37) und Übergangsbedingungen (3.40)-(3.41), folgt die normalkraftstabilisierte schwache Form nach partieller Integration zu

$$\sum_{i=1}^2 \int_{L_i} (\delta u_{,x} N + \delta N u_{,x} + \delta u \gamma_i) dx + \sum_e \int_L \delta N_{,x} \beta N_{,x} dx \quad (3.43a)$$

$$+ \left(\delta \tilde{N}_1 (u_1 - u_2) - \delta u_1 \tilde{N}_1 + \delta u_2 (\tilde{N}_1 - 1) \right) \Big|_{x=0.5} \quad (3.43b)$$

$$+ \sum_{e_R} \int_L \delta (N - \tilde{N}) \tau_K (N - \tilde{N}) dx = 0 \quad \forall \delta u, \delta N, \delta \tilde{N} \quad (3.43c)$$

und wird sowohl mit einer linearen Basis nach Gleichung (1.37) als auch einer angereicherten linearen Basis (3.8) gelöst. Der elementweise definierte Stabilisierungsparameter $\beta \sim h^2 [m^2 N^{-1}]$ wichtet die zur Vermeidung indefiniter Koeffizientenmatrizen des diskreten Systems erforderliche Normalkraftstabilisierung der gemischten Kraft-Verschiebungs-Formulierung bei ordnungsgleichen Ansätzen für Verschiebungs- und Kraftgröße [108].

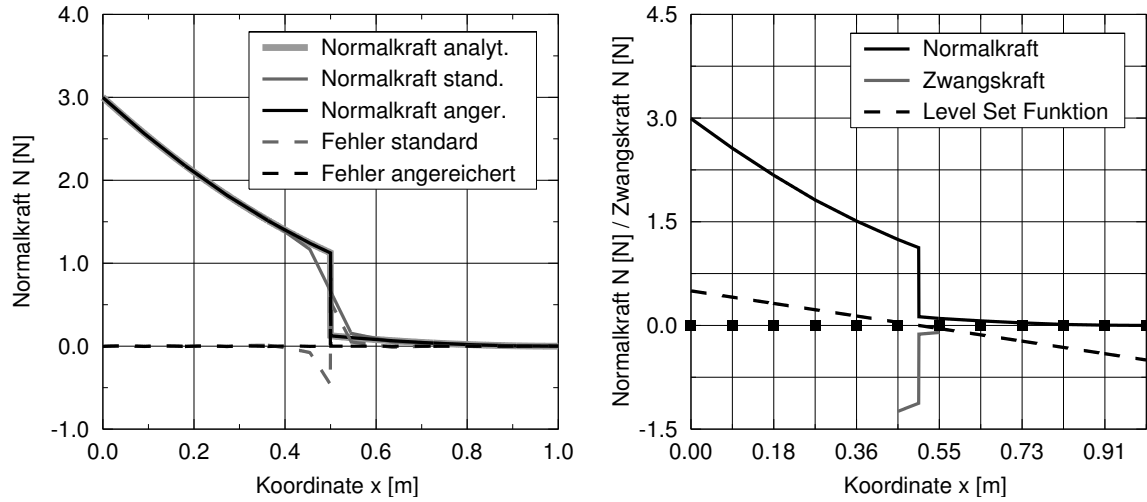


Bild 3.15: C_0 -/ C_1 -Diskontinuität: Lösung Normalkraft und Fehlerverteilung e_{rel} .

Bild 3.15 zeigt den Normalkraftverlauf im System aus analytischer und numerischer Lösung ($h = 1/11$ m). Die angereicherte Approximation bildet die C_0 - C_1 -Unstetigkeit ab. Lineare Standardansätze sind in der Umgebung der C_0 -Diskontinuität ungeeignet, da sie den Funktionsverlauf stetig abbilden und starke Unstetigkeiten über mehrere Elemente „verschmieren“. Die Verringerung der Stützweite verkleinert die räumliche Ausdehnung des Übergangsbereiches, der Lösungsfehler E_{rel} nimmt für die betrachteten linearen Ansatzfunktionen dennoch nur mit erster Ordnung ab. Die angereicherte lineare Basis besitzt hingegen genügend Freiheit, einen diskontinuierlichen Lösungsverlauf einzustellen, der quadratisch gegen die analytische Lösung konvergiert, siehe Bild 3.16.

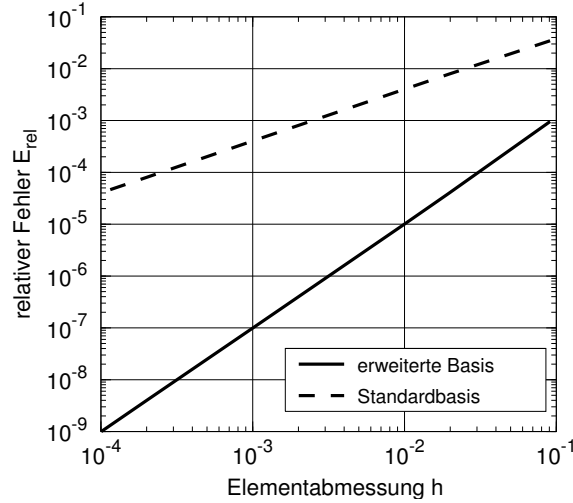


Bild 3.16: C_0 -/ C_1 -Diskontinuität: Konvergenzverhalten des Lösungsfehlers E_{rel} .

Die diskutierte Aufgabenstellung entspricht der Situation zweier ruhender, geschichteter inkompressibler Fluide unter Eigengewicht und der Präsenz von Oberflächenspannung an einer impermeablen Phasengrenze.

Instationäre C_0 -/ C_1 -Diskontinuität. Gegeben sind zwei reibungsfreie, inkompressible Fluide, die in einem Rohr der Länge $L = 1 \text{ m}$ und Querschnitt $A = 1 \text{ m}^2$ bei $x = 0.25 \text{ m}$ mit einer undurchlässigen Membran voneinander getrennt sind. Beide massebehafteten Fluide ($\bar{m} = \rho A$) mit Schichthöhe L_i sind mit konstanter Wichte γ_i belastet und werden im Beobachtungszeitraum $I =]0 \text{ s}, 1 \text{ s}]$ konstant in Rohrrichtung beschleunigt. Unter der Annahme von Gleitrandbedingungen an der Rohrwand, ist die Betrachtung der konvektionsfreien Strömung (Bild 3.17) in einer Raumdimension zulässig. Auf die Fluide wirken die Eigengewichtslasten und eine singuläre Kraft an der Kopplungsstelle.

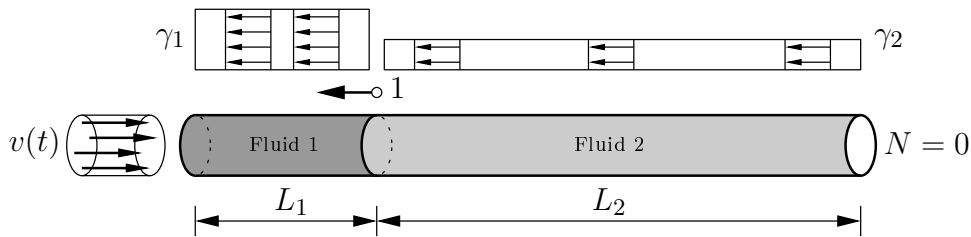


Bild 3.17: System der reibungsfreien, inkompressiblen Fluide in ortsfestem Rohr.

Die gemischte Geschwindigkeits-Druckkraft-Formulierung der Fluide $i = 1, 2$ in Eulerscher Betrachtungsweise entspricht den eindimensionalen Stokesschen Gleichungen

und lautet

$$v_{1,x} = 0, \quad \bar{m}_1 v_{1,t} - N_{1,x} + \gamma_1 = 0 \quad \forall 0.0 \text{ m} < x < x_R(t), \quad (3.44)$$

$$v_{2,x} = 0, \quad \bar{m}_2 v_{2,t} - N_{2,x} + \gamma_2 = 0 \quad \forall x_R(t) < x < 1.0 \text{ m} \quad (3.45)$$

mit den durch die Level-Set-Funktion ϕ identifizierbaren zeitabhängigen Fluidgebieten $Q_i = L_i \times I$ und der Kopplungsstelle x_R , sowie den Anfangs-, Rand- und Übergangsbedingungen für Geschwindigkeit, Druckkraft und Abstandsfunktion

$$\phi(x, t = 0) = 0.25 - x, \quad (3.46)$$

$$v_1(x, t = 0) = 0, \quad (3.47)$$

$$v_1(x = 0, t) = 1 \text{ ms}^{-2} \cdot t, \quad (3.48)$$

$$N_2(x = 1) = 0, \quad (3.49)$$

$$v_1(x = x_R) - v_2(x = x_R) = 0, \quad (3.50)$$

$$\tilde{N}_1(x = x_R) - \tilde{N}_2(x = x_R) = 1. \quad (3.51)$$

Die Druckkraft $N = pA$ entspricht dem Produkt aus Druck p und Rohrquerschnitt A . Die konstante Beschleunigung $\dot{v}_1 = 1 \text{ ms}^{-2}$ von Fluid 1 bei $x = 0.0 \text{ m}$ erzeugt infolge der Inkompressibilität beider Fluide ein räumlich konstantes Geschwindigkeitsfeld v , das die Lageänderung der Kontaktstelle x_R bewirkt. Die Veränderung der Fluidgebiete und des gemeinsamen Interfaces wird durch den Transport der skalaren Level-Set-Funktion ϕ mit der Fluidgeschwindigkeit v berücksichtigt. Die zeitabhängige Position $x_R(t) = 0.25(2t^2 + 1)$ der Kontaktstelle ist in der analytischen Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für Geschwindigkeit und Kraft

$$v(x, t) = 1 \text{ ms}^{-2} \cdot t, \quad (3.52)$$

$$N(x, t) = \begin{cases} (\gamma_2 - \gamma_1)x_R(t) + (\gamma_1 - 1)x - \gamma_2 + 2 & \forall 0.0 \text{ m} \leq x \leq x_R(t) \\ (\gamma_2 - 1)x - \gamma_2 + 1 & \forall x_R(t) \leq x \leq 1.0 \text{ m} \end{cases} \quad (3.53)$$

berücksichtigt. Die unterschiedlichen Streckenlasten $\gamma_1 \neq \gamma_2$ und die Kraft-Übergangsbedingung (3.51) bewirken ein an der Kontaktstelle C_0 -/ C_1 -unstetiges Druckkraftfeld. Die Übergangsbedingung (3.51) ähnelt der Druckdifferenz infolge der Oberflächenspannung zwischen zwei Fluiden.

Nach Anwendung der Methode der gewichteten Residuen auf die Bestimmungsgleichungen (3.44)-(3.45) und Übergangsbedingungen (3.50)-(3.51) folgt die druckkraft-

stabilisierte Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung nach partieller Integration zu

$$\sum_{i=1}^2 \int_{Q_i} (\delta v (\bar{m}_i v_{,t} - \gamma_i) - \delta v_{,x} N + \delta N v_{,x}) dQ + \sum_e \int_{Q_i} \delta N_{,x} \beta N_{,x} dQ \quad (3.54a)$$

$$+ \int_{P_C} \delta \tilde{N}_1 (v_1 - v_2) dP - \int_{P_C} \delta v_1 \tilde{N}_1 dP + \int_{P_C} \delta v_2 (\tilde{N}_1 - 1) dP \quad (3.54b)$$

$$+ \sum_{e_R} \int_Q \delta (N - \tilde{N}) \tau_K (N - \tilde{N}) dQ = 0 \quad \forall \delta v, \delta N, \delta \tilde{N} \quad (3.54c)$$

und wird gemeinsam mit der eindimensionalen Level-Set-Gleichung diskretisiert. Für die physikalischen Variablen finden im ersten Fall eine lineare Basis nach Gleichung (1.37) und alternativ eine angereicherte lineare Basis (3.8) Verwendung, während der Ansatz für die Level-Set-Funktion stets linear ist. Der elementweise definierte Parameter $\beta \sim h^2 [m^2 N^{-1} s^{-1}]$ wichtet die Druckkraftstabilisierung der gemischten Formulierung mit gleicher Ansatzordnung für alle Feldgrößen.

Bild 3.18 illustriert die zeitliche Entwicklung der Level-Set-Funktion und deren Null-Isolinie, die mit der Position der Kontaktstelle x_R identisch ist. Am Einströmrand bei $x = 0$ ist mit dem Penalty-Paramteter $\epsilon = 1.0$ die Level-Set-Randbedingung (2.18) realisiert. Der Verlauf von $\phi(t)$ bei $x = 1$ zeigt die zeitlich quadratische Abhängigkeit der Abstandsfunktion.

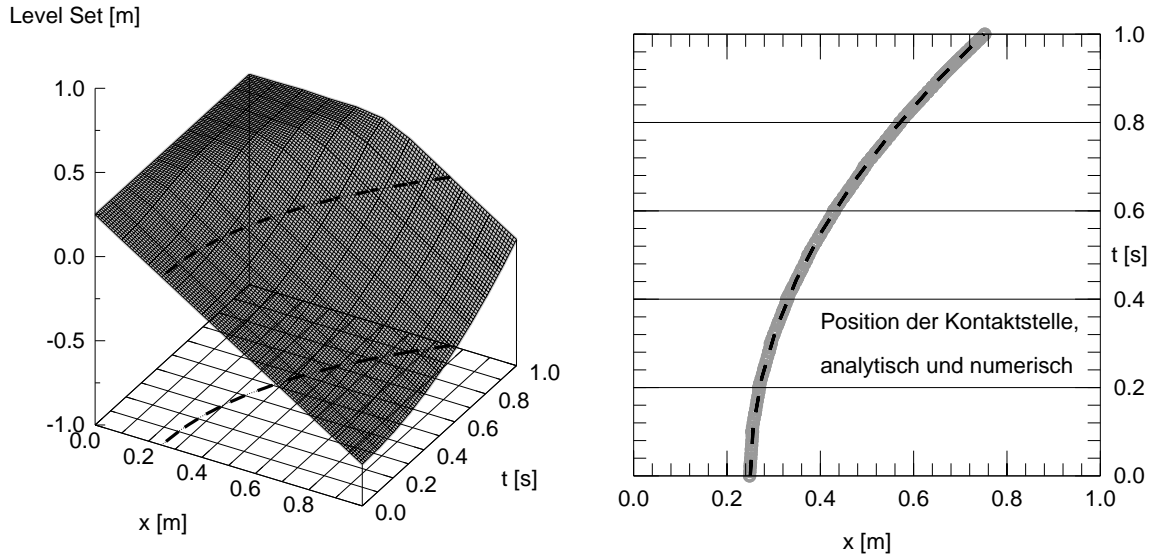


Bild 3.18: Zeitlicher Verlauf der Level-Set-Funktion und Position der Kontaktstelle.

In Bild 3.19 (linke Spalte) ist die zeitliche Entwicklung der Druckkraft bei Verwendung linearer Ansatzfunktionen gezeigt. Wie im vorangegangenen Beispiel ist der Lösungs-

sprung über mehrere Elemente räumlich verschmiert. Die in diesem Beispiel hinzutretende Zeitdimension zeigt, daß eine zeitlich veränderliche Unstetigkeitsstelle eine deutliche Vergrößerung der Verschmierungszone und damit des lokalen und globalen Lösungsfehlers zur Folge haben kann. Der Einsatz eines nach (3.8) angereicherten linearen Ansatzraumes ermöglicht die Erfassung von C_0 -/ C_1 -Unstetigkeiten sowohl im räumlichen als auch im zeitlichen Verlauf, siehe Bild 3.19 (rechte Spalte). Die Kontaktstelle erstreckt sich mit fortschreitender Zeit über mehrere Raum-Zeit-Elemente, wie in Bild 3.6 schematisch angedeutet ist. Selbst in diesem Fall kann mit Hilfe der zusätzlichen in Raum und Zeit definierten Anreicherungsansätze ein unstetiger Kraftverlauf abgebildet werden.

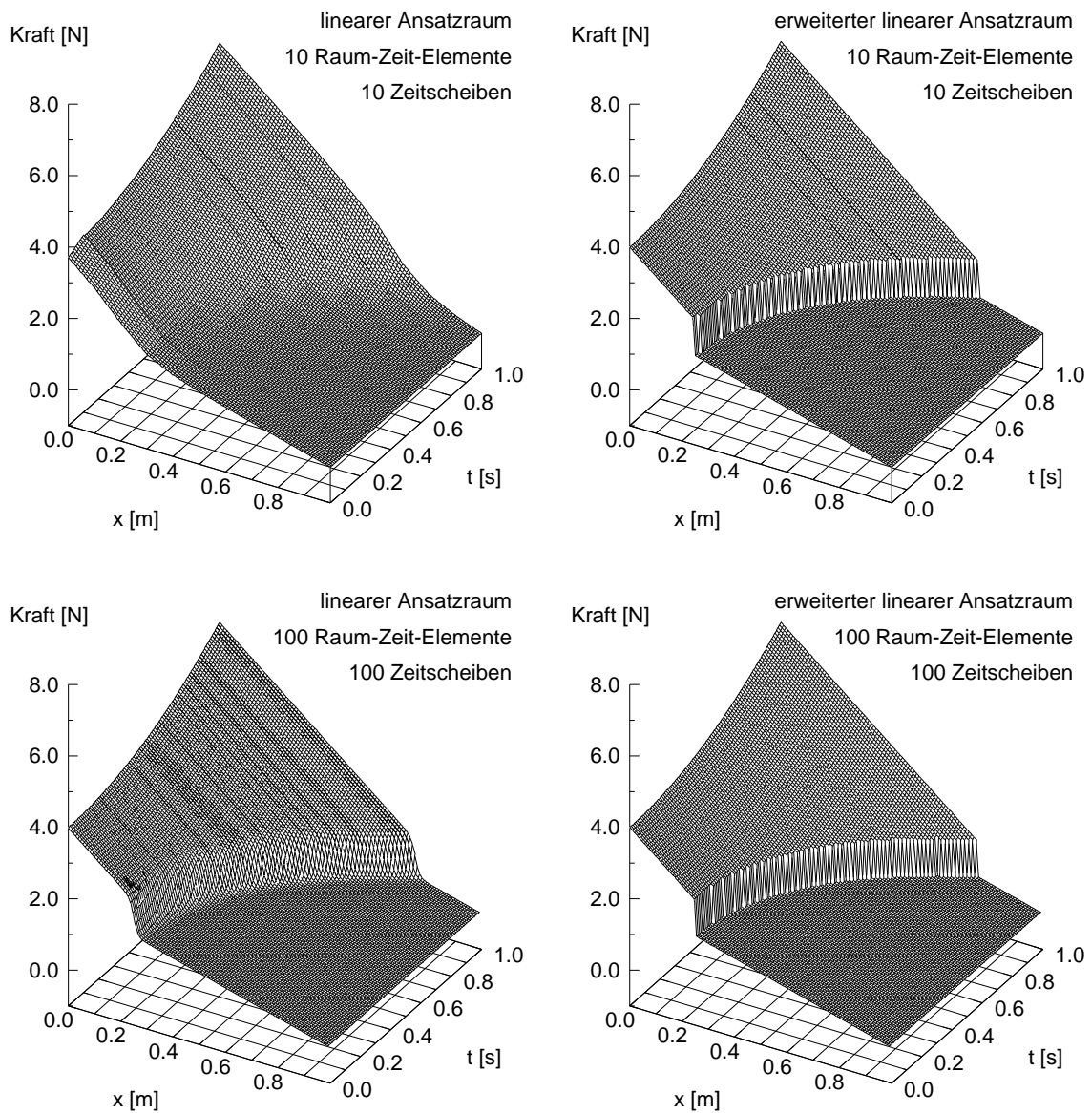


Bild 3.19: Instationäre C_0 -/ C_1 -Diskontinuität: Lösungsverlauf Druck.

Bild 3.20 zeigt die Abhängigkeit des Lösungsfehlers über das gesamte Raum-Zeit-Gebiet bei Variation der Zeitschrittweite Δt und Verwendung von 100 Raum-Zeit-Elementen je Zeitscheibe. Stetige lineare Ansätze erfordern die hohe räumliche Auflösung des Berechnungsgebietes zur Erzielung einer hinreichenden Genauigkeit bei der Abbildung bewegter Diskontinuitäten. Kann dieser Forderung nicht zu jedem Zeitpunkt entsprochen werden (Verfügbarkeit von Netzadaptivität), ist eine Verbesserung der Lösungsgüte durch Verringerung der Zeitschrittweite kaum möglich. Im Gegensatz dazu ist der zweckmäßig erweiterte lineare Ansatzraum in der Lage, schon mit einem Element die räumliche Lösung exakt darzustellen. Die Güte der Lösung im zeitlichen Verlauf ist von der Genauigkeit der Level-Set-Lösung abhängig. In Abweichung zum unstabilisierten diskontinuierlichen Galerkin-Zeitintegrationsverfahren mit 3. Ordnung Genauigkeit für lineare Ansätze in der Zeit, konvergiert die advektionsstabilisierte Level-Set-Gleichung mit 2. Ordnung. Der Fehler der angereicherten Ansatzfunktion strebt daher ebenso quadratisch in der Zeit gegen die exakte Lösung.

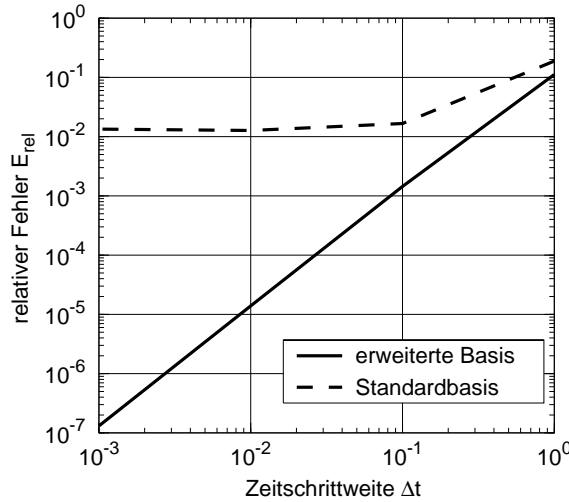


Bild 3.20: Instationäre C_0 -/ C_1 -Diskontinuität: Konvergenz Lösungsfehler E_{rel} .

Eine physikalische Analogie zu diesem Testfall ist in der Dynamik aufsteigender Blasen zu finden. Die beteiligten Fluide besitzen unterschiedliche Wichten und an der Phasengrenze verursacht das Phänomen der Oberflächenspannung einen krümmungs- und materialabhängigen Drucksprung. Die in diesem Fall reibungs- und konvektions-behaftete Strömung ist mit den Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben.

4. Elastische Festkörper

Aufgaben der Mechanik elastischer Körper umfassen unter anderem die Modellierung von Defekten, wie Einschlüsse und Poren, die Untersuchung des Einflusses von Rissen auf den Beanspruchungszustand eines Festkörpers, sowie materialabhängiges dynamisches Rißwachstum. Für die Formulierung makroskopischer Materialmodelle und zur Vorhersage des mechanischen Verhaltens von Verbundwerkstoffen sind auftretende Kontaktflächen zwischen unterschiedlichen Materialien zu modellieren. Beispiele für solche Aufgaben sind im Ingenieurwesen (Verbundwerkstoffe, Sprödbruchversagen von Bauteilen), den Geowissenschaften (Mechanik geschichteter Böden, Plattentektonik) oder der Physik und Chemie der Kristalle (Erstarrungsvorgänge) zu finden, siehe Bild 4.1. Die Analyse von Wellenausbreitungsphänomenen in Körpern, die durch diskrete materielle Inhomogenitäten beliebiger Form und Verteilung geprägt sind, ist nur numerisch möglich [59]. In praxisrelevanten Problemstellungen dominieren komplex ge-

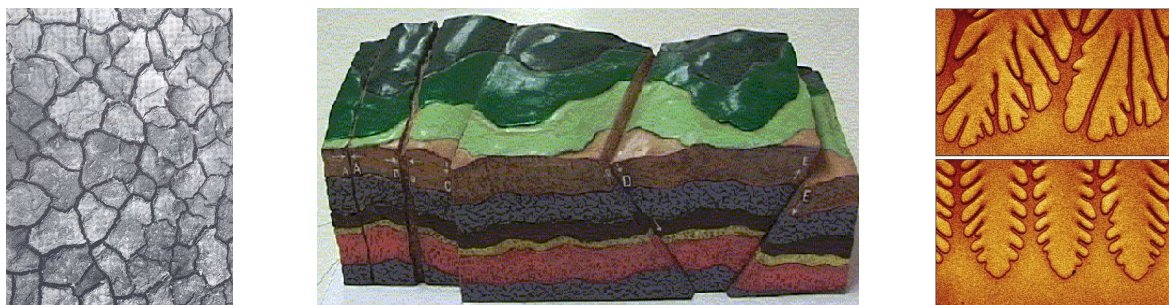


Bild 4.1: Risse, Bodenschichtung und Erstarrungsvorgänge

formte Grenzflächen zwischen den Medien. Zusätzlich können die Trennflächen im Fall von Rißwachstum und Kristallisation instationär sein und ihre Lage und Form ändern. Lösungsverfahren für solche Aufgabenstellungen müssen neben den Teilgebieten und Trennflächen vorhandene Diskontinuitäten der physikalischen Beschreibungsgrößen berücksichtigen. Standardverfahren sind die Randintegral- und Finite-Element-Methode mit kontinuierlicher Anpassung der Rand- bzw. Gebietsdiskretisierung. Die hierbei wiederholt notwendige Neuvernetzung ist für komplizierte Geometrien mit variierender Defektstellenanzahl und -verteilung mit beträchtlichem Zeitaufwand verbunden und verursacht einen zusätzlichen Diskretisierungsfehler durch die erforderliche Lösungsprojektion auf das neue Netz. Alternative netzfreie Verfahren [14] sind ineffizient bei der Integration der diskreten Bestimmungsgleichungen.

4.1 Modellbildung

Das dynamische Verhalten dreidimensionaler elastischer Festkörper und ihr mechanischer Beanspruchungszustand unter äußerer Belastung ist mit den Modellgleichungen der geometrisch nichtlinearen Elastodynamik für endliche Verschiebungen und Verzerrungen beschrieben. Bei zweidimensionalen Beanspruchungs- und Verformungszuständen des Körpers ist die Betrachtung des ebenen Spannungs- bzw. Verzerrungszustandes ausreichend.

Das zu analysierende Kontinuum besteht aus mehreren randgekoppelten Festkörpern unterschiedlichen Materials. Zum Zweck der Übersichtlichkeit ist die folgende Darstellung auf zwei Festkörper beschränkt. Die Bilanzgleichungen für Masse (1.16), Impuls (1.17) und Drehimpuls in Lagrangescher Betrachtungsweise bilden die Grundlage des Festkörpermodells. Die Dichte an einem Punkt der materiellen Konfiguration ist zeitinvariant, so daß die Massenerhaltung keine Bestimmungsgleichung liefert und die Dichte als Beschreibungsgröße entfällt. Die materielle Geschwindigkeit und der durch den 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor beschriebene Beanspruchungszustand sind Zustandsgrößen des Berechnungsmodells. Das Materialverhalten ist linear elastisch und mit Gleichung (1.25) in Ratenform beschrieben. Bei Betrachtung des Systemverhaltens auf der Makroskala ist die Modellierung wechselnder physikalischer Eigenschaften als Kontaktunstetigkeit zweckmäßig [70]. An der gebietstrennenden Grenzfläche der Dicke Null wechseln die in jedem Teilbereich konstanten Materialeigenschaften Elastizitätsmodul, Querdehnzahl und Dichte unstetig. Bild 4.2 zeigt die randgekoppelten elastischen Bereiche des Kontinuums.

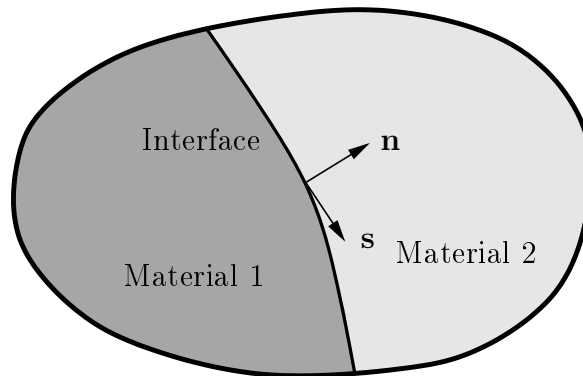


Bild 4.2: Festkörper – randgekoppelte Bereiche unterschiedlicher Materialien.

An der Kopplungsfläche zweier, in der Materialkonfiguration beschriebener Festkörper sind geometrische und dynamische Übergangsbedingungen definiert. Die Massebilanzgleichung fordert die Stetigkeit der materiellen Geschwindigkeit normal zum Interface. In die Impulsbilanz gehen Reibungseinflüsse (Haft- bzw. Gleitreibung) ein und induzieren einen am Kopplungsrand diskontinuierlichen Tangentialspannungsverlauf. Bei

Kontaktunstetigkeiten liegt der in Bild 4.3 gezeigte qualitative Verlauf der Normalgeschwindigkeiten und Tangentialspannungen an der Grenzfläche vor. Bei Festkörpern, die mit Rissen oder Kerben versehen sind, ist der mechanische Beanspruchungszustand an den Ufern der Rißfläche vollständig entkoppelt. Übergangsbedingungen, wie sie für Kontaktunstetigkeiten vorliegen, sind nicht definiert. Der Verlauf von Geschwindigkeit und Spannung ist daher unstetig.

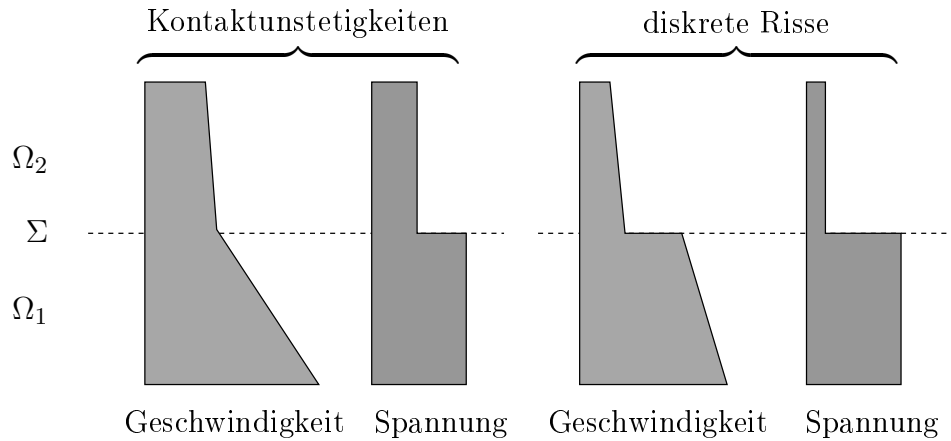


Bild 4.3: Diskontinuierliche Beschreibungsgrößen an der Grenzfläche.

Kerben und Risse besitzen im räumlich zweidimensionalen Fall mindestens eine Rißspitze innerhalb einer Festkörperstruktur, wie Bild 4.4 zu entnehmen ist, und führen zu örtlich hohen Beanspruchungen, deren möglichst genaue Vorhersage für zuverlässige Festigkeitsaussagen über betroffene Bauteile unumgänglich ist. Schon bei geringer Belastung treten im Bereich der Rißspitze plastische Verformungen auf. Der dortige Verzerrungszustand ist vom Beanspruchungszustand des umgebenden isotropen linear-elastischen Materials dominiert, wenn das Gebiet plastischer Verformungen von sehr kleiner Ausdehnung ist. Der Riß wächst, wenn die Beanspruchung an der Rißspitze den maximalen Widerstand des Materials übersteigt. Mit geeigneten Modellen [37, 49, 78] sind Aussagen über den eintretenden Rißbruch, sowie über den räumlichen Rißfortschritt [76] im Festkörper möglich. Die Rißspitze ändert hierbei Ausrichtung und Lage und erzeugt neue diskrete Rißflächen. Die Lage der bestehenden Rißfläche bleibt zeitlich unverändert.

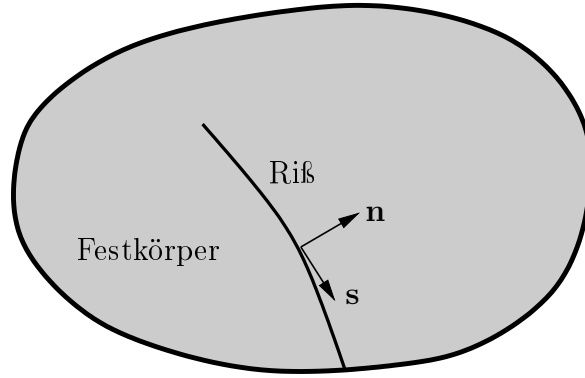


Bild 4.4: Festkörper – diskreter Riß mit Rißspitze.

Ausgehend von der Belastung ist zwischen drei Riffnungsarten zu unterscheiden, die Bild 4.5 verdeutlicht. Die Umstände bei Sprdbruchversagen gibt die Riffnungsart I am besten wieder und ist daher von besonderem Interesse. Der einer Riffnungsart zugeordnete Spannungsintensitätsfaktor K charakterisiert den Spannungszustand in der Umgebung der Rißspitze.

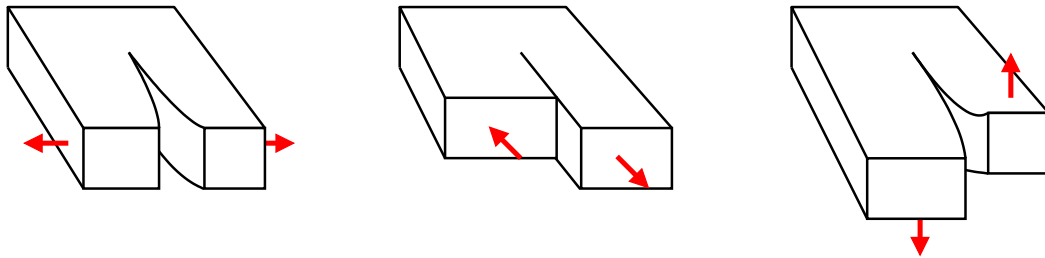


Bild 4.5: Riffnungsarten (crack modes) I, II und III.

Die Berücksichtigung auftretender Diskontinuitäten führt auf die beschriebenen Diskretisierungsschwierigkeiten bei der Lösung der Modellgleichungen mit numerischen Standardverfahren. Die hier vorgestellte Methodik löst die zugrundeliegenden Bestimmungsgleichungen auf einer topologisch fixierten Gebietsdiskretisierung und erft den C_0 -/ C_1 -unstetigen Verlauf der Zustandsgrößen durch lokale Anreicherung des Ansatzraumes an der mit der Level-Set-Funktion erftten Kopplungsfläche. Der Beanspruchungszustand im Abstand r von der Rißspitze ist für linear elastisches Materialverhalten $\frac{1}{\sqrt{r}}$ -singulär und mit Polynomen nur unzureichend approximierbar. Mos, Dolbow und Belytschko verwenden in [64] spezielle Anreicherungsfunktionen zur Abbildung der Singularitäten an Rißspitzen und setzen die Anreicherungsfunktion (3.7) zur Entkoppelung der Verschiebungsfelder entlang der Rißflächen ein. Obwohl im Rahmen dieser Arbeit auf eine zusätzliche Rißspitzen-Anreicherung verzichtet wird, ist das Modell

in dieser Hinsicht prinzipiell erweiterbar. Im Bereich der Rißspitzen ist zur Erzielung hinreichend genauer Ergebnisse daher weiterhin eine feine räumliche Diskretisierung notwendig.

4.2 Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung

Die zeitdiskontinuierliche Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung der mit den in Abschnitt 4.1 aufgeführten Modellannahmen für die Elastodynamik randgekoppelter Festkörper ergänzten gemischt-hybriden Variationsform lautet

$$\sum_{i=1}^2 \int_{Q_{i,n}^X} \delta \mathbf{v}_i \cdot \rho_i \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \Big|_X - \mathbf{b}_i \right) dQ^X + \sum_{i=1}^2 \int_{Q_{i,n}^X} \dot{\mathbf{E}}(\delta \mathbf{v}_i, \mathbf{u}_i) : \mathbf{S}_i dQ^X \quad (4.1a)$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \sum_{e_i} \int_{Q_{i,n}^X} \delta \mathbf{S}_i : \left(\underline{\mathbf{C}}^{-1} : \mathbf{S}_i - \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{v}_i, \mathbf{u}_i) \right) dQ^X \quad (4.1b)$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_{i,n}^X} \delta \mathbf{v}_i(t_n^+) \cdot \rho_i (\mathbf{v}_i(t_n^+) - \mathbf{v}_i(t_n^-)) d\Omega^X \quad (4.1c)$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \sum_{e_i} \int_{\Omega_{i,n}^X} \delta \mathbf{S}_i(t_n^+) : \underline{\mathbf{C}}^{-1} : (\mathbf{S}_i(t_n^+) - \mathbf{S}_i(t_n^-)) d\Omega^X \quad (4.1d)$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \int_{P_{D,i,n}^X} \delta \mathbf{t}_i \cdot (\mathbf{v}_i - \bar{\mathbf{v}}_i) dP^X - \sum_{i=1}^2 \int_{P_{D,i,n}^X} \delta \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{t}_i dP^X \quad (4.1e)$$

$$- \sum_{i=1}^2 \int_{P_{N,i,n}^X} \delta \mathbf{v}_i \cdot \bar{\mathbf{t}}_i dP^X \quad (4.1f)$$

$$+ \int_{R_n^X} \delta \tilde{\mathbf{t}}_1 \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) dR^X \quad (4.1g)$$

$$- \int_{R_n^X} \delta \mathbf{v}_1 \cdot \tilde{\mathbf{t}}_1 dR^X + \int_{R_n^X} \delta \mathbf{v}_2 \cdot (\tilde{\mathbf{t}}_1 - \mathbf{N}^T \check{\mathbf{t}}) dR^X \quad (4.1h)$$

$$= 0 \quad \forall \delta \mathbf{v}_i, \delta \mathbf{S}_i, \delta \mathbf{t}_i, \delta \tilde{\mathbf{t}}$$

für die Raum-Zeit-Scheibe $Q_{i,n}^X = \Omega_i^X \times I_n$ mit dem Dirichlet-Rand $P_{D,i,n}^X$, dem Neumann-Rand $P_{N,i,n}^X$ und der gemeinsamen Grenzfläche R_n^X in der Materialkonfiguration \mathcal{K}^X der Betrachtungsweise nach Lagrange. Die hochgestellten Indizes zur Kennzeichnung von Bezugskonfiguration und Abbildung aller physikalischen Größen entfallen in (4.1) im Sinne besserer Lesbarkeit.

Die schrittweise Auswertung der Integralform (4.1) erfolgt für alle Zeitscheiben Q_n^X . Die in die Variationsformulierung aufgenommene Konstitutivgleichung (1.25) in Rateform und die in Abschnitt 4.1 getroffene Annahme zur materiellen Dichtekonstanz jedes Teilkörpers führt mit $\delta\rho_i = 0$ auf die aus (1.35) abgeleitete gemischte Integralform (4.1), formuliert mit den unbekannten Zustandsgrößen Geschwindigkeit \mathbf{v} und Piola-Kirchhoff-II-Spannungen \mathbf{S} , sowie den Rand- und Interfacespannungen \mathbf{t} und $\check{\mathbf{t}}$.

Der Anfangszustand jedes Teilkörpers ist spannungsfrei, so daß

$$\mathbf{S}_i(t_a^-) = \mathbf{0} \quad \text{in} \quad \Omega_i^X \quad (4.2)$$

als Anfangsbedingung für den Sprungterm (4.1d) gilt. Der Verschiebungszustand am Ende einer Zeitscheibe

$$\mathbf{u}(t_{n+1}) = \mathbf{u}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{v}(t) dt \quad (4.3)$$

wird in einer Nachlaufrechnung mit der Integration der Geschwindigkeit über die Zeitscheibendicke Δt und dem Verschiebungszustand am Anfang der Zeitscheibe bestimmt. Das Verschiebungsfeld ist an den Zeitscheibenübergängen stetig.

Eine Diskussion der schwachen Form der Bestimmungsgleichungen im Gebiet (4.1a)-(4.1d) und auf dem äußeren Rand (4.1e)-(4.1f) ist bei Hübner [45] zu finden. Wie in der dort aufgeführten gemischt-hybriden Formulierung nach Knippers und Harbord [53] ist der Spannungszustand in den Gebieten der finiten Elemente definiert und an den Elementkanten nicht stetig. Zeile (4.1g) beinhaltet die mit der Variation der Spannungen am Kopplungsrand gewichtete integrale Formulierung der geometrischen Übergangsbedingung (1.33), die am Interface kontinuierliche Geschwindigkeiten fordert. Der erste Term in Zeile (4.1h) folgt aus partieller Integration der Impulsbilanzen für beide Festkörperkontinua und verwendet den Spannungszustand von Festkörper 1 am Kopplungsrand als Unbekannte. Der zweite Term dieser Zeile repräsentiert die schwache Form der dynamischen Übergangsbedingung (1.34) nach partieller Integration der Impulsbilanzen. Der Vektor $\hat{\mathbf{t}}$ charakterisiert die Änderung des Spannungszustandes an der Grenzfläche in Normal- und Tangentialrichtung. Haft- und Gleitreibungseffekte sind mit Definition des Vektors

$$\check{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_H + \eta_G \operatorname{sign}(\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{s}_1) \\ \eta_H + \eta_G \operatorname{sign}(\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{s}_2) \end{pmatrix} \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \quad (4.4)$$

berücksichtigt, in dem die aktuelle Normalspannung und Relativgeschwindigkeit am Interface sowie die Koeffizienten der Haft- und Gleitreibung berücksichtigt sind [13].

Stabilisierung. Die Integralform (4.1) ist mit Termen einer Galerkin-/Least-Squares-Stabilisierung

$$+ \sum_{i=1}^2 \sum_{e_i} \int_{Q_{i,n}^X} \tau_{I,i} \frac{1}{\rho_i} \mathcal{L}_I(\delta \mathbf{v}_i, \delta \mathbf{S}_i) \cdot (\mathcal{L}_I(\mathbf{v}_i, \mathbf{S}_i) - \rho_i \mathbf{b}_i) \, dQ^X \quad (4.5a)$$

$$+ \sum_{e_R} \int_{Q_n^X} \tau_K \mathcal{L}_K(\delta \mathbf{S}_i, \delta \tilde{\mathbf{t}}) \cdot \mathcal{L}_K(\mathbf{S}_i, \tilde{\mathbf{t}}) \, dQ^X \quad (4.5b)$$

ergänzt, worin die Operatoren

$$\mathcal{L}_I(\mathbf{v}_i, \mathbf{S}_i) = \rho_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \Big|_X - \nabla_X \cdot (\mathbf{F}\mathbf{S})_i, \quad (4.6)$$

$$\mathcal{L}_K(\mathbf{S}_i, \tilde{\mathbf{t}}_i) = \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{n} - \tilde{\mathbf{t}}_i \quad (4.7)$$

die Residuen der Impulsbilanz (1.17) und des Gleichgewichts zwischen 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor und Spannungsvektor auf dem Rand in differentieller Form bezeichnen.

Die Galerkin-/Least-Squares-Stabilisierung der Impulsbilanz verhindert Oszillationen der Lösung bei Wellenausbreitungsphänomenen in elastischen Strukturen. Die Bestimmungsgleichung des Stabilisierungsparameteters τ_I zur Wichtung der Stabilisierungsterme entspricht der von Hübner in [45] verwendeten Definition. Der Stabilisierungsparameter τ_K wird nach (3.24) bestimmt und wichtet die Stabilisierung des implizit formulierten Lagrange-Multiplikators $\tilde{\mathbf{t}}$.

Grenzfläche und angereicherte Ansatzfunktionen. Die Level-Set-Funktion ϕ (Abschnitt 2.2) beschreibt die Lage der in der Materialkonfiguration fixierten Grenzfläche R und dient zur Unterscheidung der Festkörpergebiete Q_1 und Q_2 . Die betrachteten Kontaktunstetigkeiten sind stationär, und die Evolution der Level-Set-Funktion entfällt. Auf der topologisch unveränderten Geometrieapproximation des gesamten Festkörpergebietes gelten die in Abschnitt 3.2.3 eingeführten erweiterten Ansatzfunktionen für die Beschreibungsgrößen \mathbf{v} , \mathbf{S} und $\tilde{\mathbf{t}}$. Die elementweise Definition des Spannungszustandes erlaubt die Kondensation der Spannungsfreiwerte auf Elementebene, so daß im globalen diskreten System ausschließlich Unbekannte des Geschwindigkeits- und Rand- bzw. Interfacespannungsansatzes zu bestimmen sind. Der erweiterte Finite-Element-Ansatzraum erlaubt entlang der Kopplungsfläche diskontinuierliche Beschreibungsgrößen auf Grundlage der Level-Set-Funktion. Der Lagrange-Multiplikator $\tilde{\mathbf{t}}$ stellt die geometrischen Übergangsbedingungen her und liefert Informationen über die Spannungen am Kopplungsrand. Der Verschiebungszustand ist mit den erweiterten Ansatzfunktionen für die Geschwindigkeiten im Element potentiell diskontinuierlich. Mit

der Vorschrift

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{N}\boldsymbol{\psi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}^* \end{bmatrix}_{t_{n+1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{N}\boldsymbol{\psi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}}^* \end{bmatrix}_{t_n} + \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{N}\boldsymbol{\psi} \end{bmatrix} \cdot \int_{t_n}^{t_{n+1}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}} \\ \hat{\mathbf{v}}^* \end{bmatrix} dt \quad (4.8)$$

erfolgt die Integration der Geschwindigkeitsfreiwerte für die gewöhnlichen und angereicherten Ansatzfunktionen, und die aus räumlich unstetigen Geschwindigkeitsfeldern folgenden diskontinuierlichen Verschiebungen werden erfasst.

4.3 Scheibe mit Störstelle

Der Beanspruchungszustand von Bauteilen mit materiellen Inhomogenitäten ist im Bereich der Kontaktstelle vom Wechsel der Materialeigenschaften geprägt. Am Beispiel der in Bild 4.6 gezeigten doppelsymmetrischen Scheibe mit kreisförmigem Einschluß wird der Einfluß der bi-materiellen Grenzfläche auf den Verschiebungsverlauf für den ebenen Spannungszustand bei geometrisch nichtlinearer Kinematik untersucht.

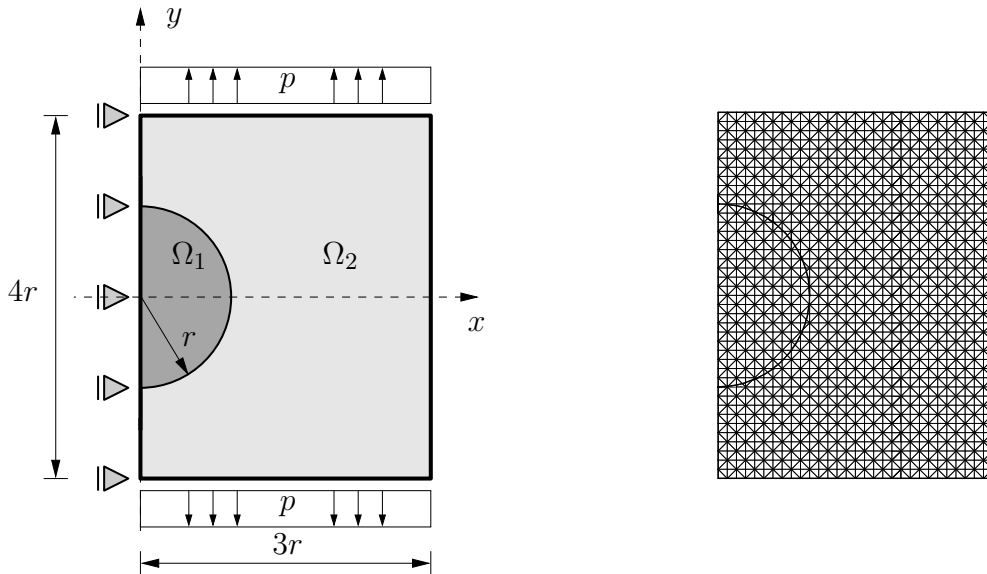


Bild 4.6: Symmetrische Scheibe mit kreisförmigem Einschluß unter Zugbelastung.

Das an der Symmetrieachse ($x = 0$) geteilte System besteht aus zwei elastischen Teilkörpern, die die Bereiche Ω_1 und Ω_2 einnehmen. Das Gebiet des Einschlusses besitzt die Form eines Kreises mit Radius $r = 1$ cm und Mittelpunkt im Koordinatenursprung. An Ober- und Unterseite der Scheibenstruktur der Dicke $d = 1$ cm greift die Randnormalspannung p an und ruft einen zur x -Achse symmetrischen Beanspruchungszustand hervor. Die Parameter des linear elastischen Materials, Elastizitätsmodul E und

Querdehnzahl ν sind für die Materialkombinationen (A), (B) und (C) in Tabelle 4.3 zusammengestellt.

Kombination	E_1 [g/cm/s ²]	E_2 [g/cm/s ²]	ν_1 [-]	ν_2 [-]
(A)	10	10	0.1	0.1
(B)	10	10	0.1	0.3
(C)	1000	10	0.1	0.1

Tabelle 4.1: Materialkombinationen.

Die gleichmäßige Diskretisierung der Scheibe mit 6-Knoten-Raum-Zeit-Prismenelementen ist ebenfalls in Bild 4.6 aufgeführt. Die Grenzfläche zwischen Bereichen unterschiedlichen Materials schneidet einige finite Elemente und fällt nicht mit Elementkanten zusammen. Der erweiterte Ansatzraum der Finite-Element-Approximation ist in der Lage, die zu erwartenden Unstetigkeiten der Beschreibungsgrößen am Interface abzubilden. Bei der Berechnung kommt ein Netz mit 30×40 Knoten zum Einsatz.

Eine analytische Lösung der Aufgabenstellung liegt nicht vor. Daher liefert die mit 12700 Netzknoten durchgeführte Vergleichsberechnung auf Grundlage des von Hübner [45] vorgestellten 8-Knoten-Raum-Zeit-Hexaederelements eine geeignete Referenzlösung. Bei der Generierung des Referenznetzes muß die Kontur der Kontaktunstetigkeit mit Elementkanten zusammenfallen.

Der Körper ist mit einer Streckenlast $p = 1.0 \text{ g/cm/s}^2$ am oberen und unteren Rand belastet und weist für die betrachteten Materialkombinationen den in Bild 4.7 gezeigten Verlauf der Horizontalverschiebung $u_x(x, y = 0)$ auf. Die Abbildung zeigt ebenfalls die Verformung der Struktur mit einem Einschluß hoher Steifigkeit im Fall (C). Besitzen Einschluß und umgebendes Gebiet verschiedene Materialparameter, weist der Verschiebungsverlauf bei $x = 1.0 \text{ cm}$ eine C_1 -Unstetigkeit auf. Der damit verbundene Sprung der Verzerrungen und des Spannungszustandes kann durch die Anreicherung der Approximation auch innerhalb eines Elementes abgebildet werden. Die Kontinuität der angereicherten Geschwindigkeitslösung sichert der implizit formulierte Lagrange-Multiplikator. Die unter der Annahme nichtlinearer Kinematik gewonnene Verschiebungslösung stimmt in allen betrachteten Fällen trotz der groben räumlichen Diskretisierung gut mit der jeweiligen Referenzlösung überein. Bei Verfeinerung des regelmäßigen Netzes konvergiert die Verschiebungslösung quadratisch gegen die Referenzlösung.

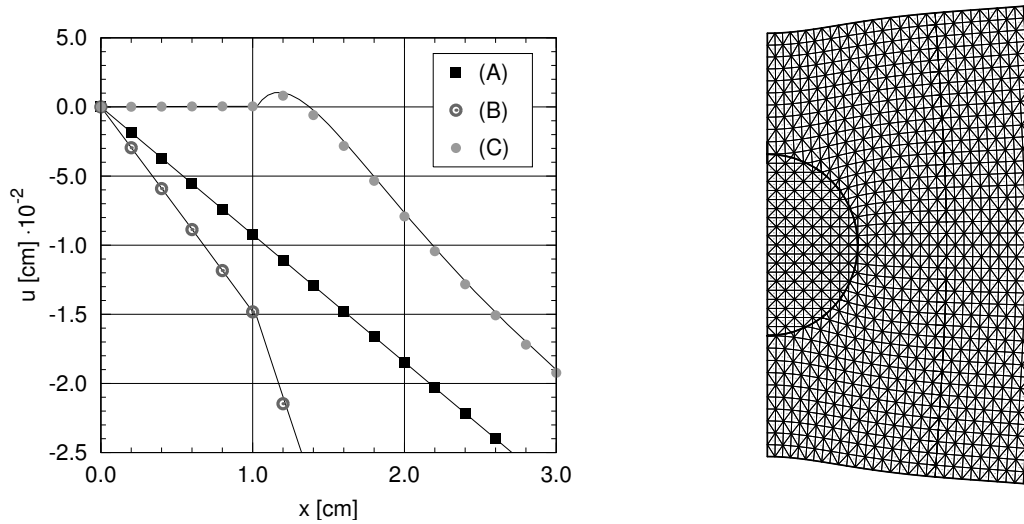


Bild 4.7: $p = 1.0 \text{ g/cm/s}^2$: Verschiebung $u_x(x, y = 0)$ und Verformungsfigur Fall (C).

Den Verlauf der Horizontalverschiebung entlang der x -Achse bei Umkehr der Lastrichtung mit $p = -1.0 \text{ g/cm/s}^2$ zeigt Bild 4.8. Als Folge der geometrischen Nichtlinearität treten im Fall (C) geringere Verschiebungen am freien Ende der Scheibe bei $x = 3.0 \text{ cm}$ auf. In der Nähe der steifen Inhomogenität sind größere negative Verschiebungen vorhanden.

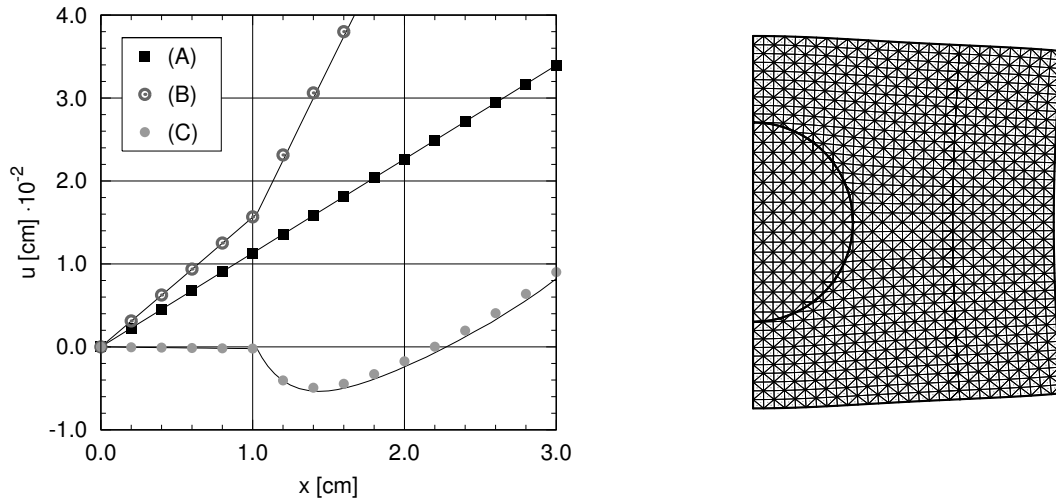


Bild 4.8: $p = -1.0 \text{ g/cm/s}^2$: Verschiebung $u_x(x, y = 0)$ und Verformungsfigur Fall (C).

Details des Berechnungsnetzes in der Momentankonfiguration zeigt Bild 4.9. Im Vergleich dazu ist die kantenangepasste Vernetzung der Referenzdiskretisierung angegeben. Bei impliziter Grenzflächenerfassung mit der Level-Set-Methode braucht bei der Diskretisierung des Berechnungsgebiets keine Rücksicht auf existierende Interfaces genommen werden. Eine explizite Beschreibung des Kopplungsrandes zwischen den Gebieten verlangt einen erheblichen Mehraufwand bei der Erzeugung des Berechnungsnetzes.

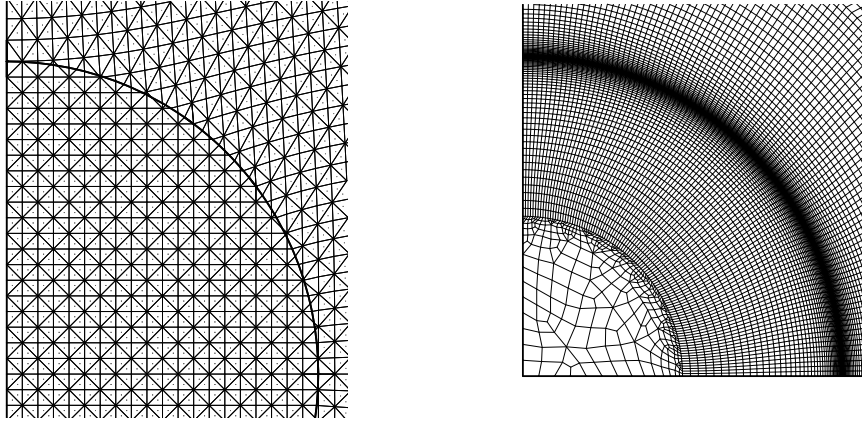


Bild 4.9: Verformte Netzgeometrie für implizite und explizite Interfacebeschreibung.

Die Komplexität der mit der vorgestellten Methodik untersuchbaren Aufgabenstellungen geht über den Fall einfacher kreisförmiger Einschlüsse weit hinaus. Bild 4.10 zeigt eine Reihe unterschiedlich geformter Inhomogenitäten, deren Materialeigenschaften gegenüber der umgebenden Struktur variieren. Die Level-Set-Funktion läßt bei ausreichend hoher Auflösung der zugrundeliegenden Gebietsdiskretisierung stark gekrümmte Kontaktflächen zu. Die Untersuchung mehrerer diskreter Materialinhomogenitäten in elastischen Strukturen ist ohne Änderung der Methodik durchführbar.

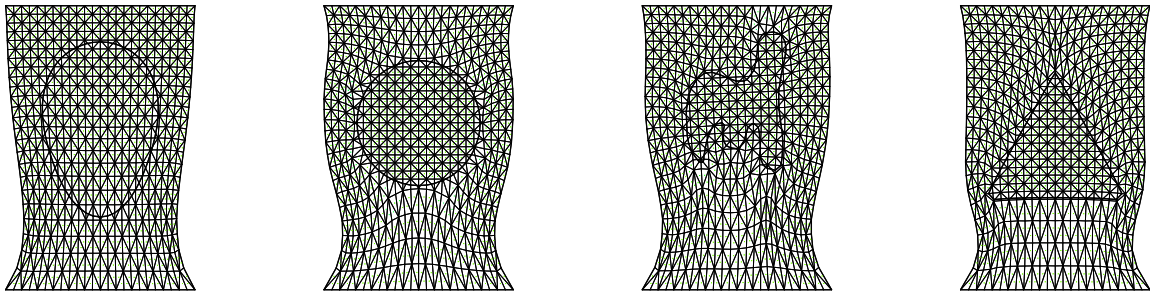


Bild 4.10: Form- und materialverschiedene Einschlüsse auf festem Gebietsnetz.

4.4 Scheibe mit Riß

Der Beanspruchungszustand in der Umgebung eines Risses in dem in Bild 4.11 dargestellten Bauteil ist unter Voraussetzung des ebenen Spannungszustandes zu bestimmen. Die zur y -Achse symmetrische Scheibe der Dicke $d = 1$ cm besitzt einen geraden Riß der Länge $2r = 2$ cm und ist senkrecht zur Riebene durch die am oberen und unteren Rand angreifende Einwirkung $p = 1$ g/cm/s² belastet. Die Beanspruchung ist charakteristisch für die in Bild 4.5 veranschaulichte Riffnungsart I.

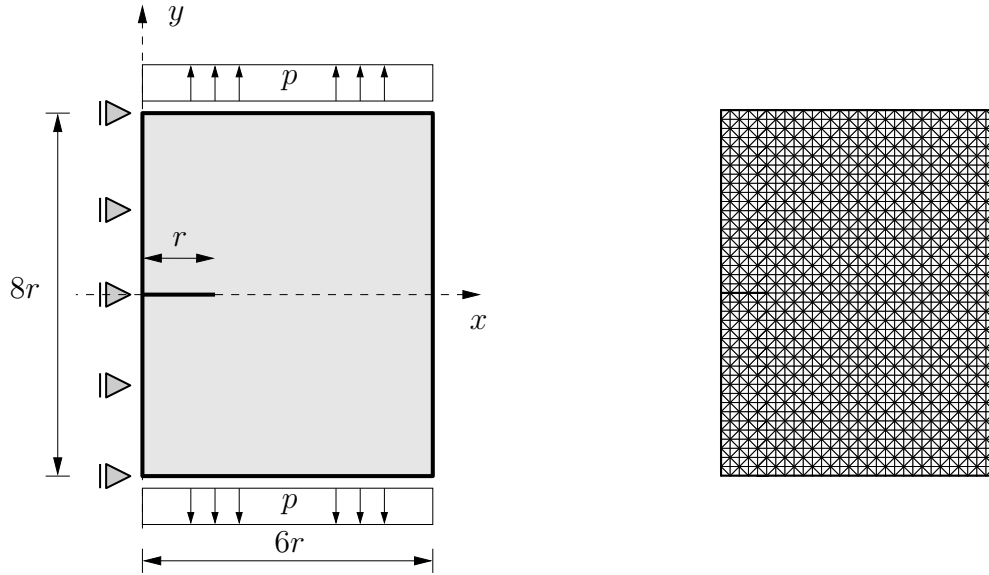


Bild 4.11: Symmetrische Scheibe mit horizontalem Riß unter Zugbelastung.

Für eine ribehaftete unendliche Scheibe liegen die mit dem Verfahren der komplexen Spannungsfunktionen [80] gewonnenen analytischen Lösungen für die Spannungen und für den Verschiebungszustand in vertikaler Richtung

$$u_y(x, y = 0) = p r \frac{2(1 + \nu)}{E} \cdot \frac{1 + \frac{3-\nu}{1+\nu}}{4} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} \quad (4.9)$$

auf dem Ligament vor. Die Spannungskomponenten weisen in der Umgebung der Rißspitze eine Singularität auf und die Vertikalverschiebung besitzt Ellipsenform. Diese Lösung gilt näherungsweise für endliche Scheiben, wenn die Bauteilberandungen hinreichend weit vom betrachteten Riß entfernt sind, so daß ihr Einfluß vernachlässigt werden kann. Der Übergang vom Spannungs- und Verformungszustand der idealisierten unendlichen Scheibe auf den realer Bauteile begrenzter Abmessungen gelingt mit dem Spannungsintensitätsfaktor (SIF), in den neben den Randbedingungen die Riß- und Bauteilgeometrie eingeht.

Im diskretisierten Scheibengebiet ist die Riposition relativ zu den Elementen beliebig, wie Bild 4.12 illustriert. Die Level-Set-Methode erlaubt schräge und gekrümmte Rigeometrien. Die eingesetzte Ansatzanreicherung berücksichtigt C_0 -/ C_1 -Diskontinuitäten, so daß bezüglich auftretender Spannungssingularitäten keine Verbesserung der Näherungslösung in der Umgebung der Rißspitze zu erwarten ist.

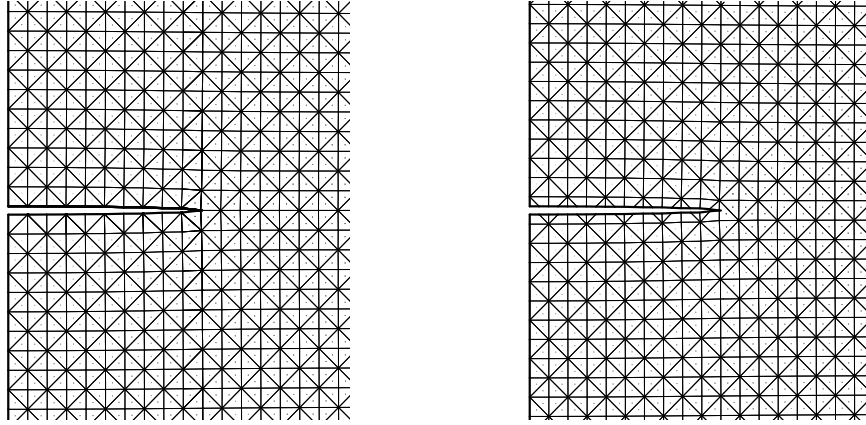


Bild 4.12: Verformung (überhöht) auf rißangepaßtem/nicht angepaßtem Netz.

Die ellipsenförmige Rißaufweitung bildet das Verfahren schon bei grober räumlicher Diskretisierung (60×80 Knoten) in Rißspitzennähe hinreichend ab (Bild 4.13). Die numerische Lösung für die vertikale Verschiebung auf dem Ligament konvergiert bei Erhöhung der Netzauflösung (120×160 und 240×320 Knoten). Ursachen für Abweichungen von der analytischen Verschiebungslösung für die unendliche Scheibe sind endliche Bauteilabmessungen und von den Idealannahmen abweichende Randbedingungen. Entlang der y -Achse verläuft die Vertikalverschiebung bei $x = 0.0$ diskontinuierlich. Die auf einer Elementkante bzw. im Element C_0 -unstetige Lösungsfunktion ist frei von unphysikalischen Oszillationen. Aussagen zur Lösungsqualität sind hier nicht möglich, da keine analytische Verschiebungslösung $u_y^+(x = 0, y)$ auf der Symmetrieachse vorliegt. Eine Verfeinerung der Diskretisierung zeigt jedoch, daß die numerische Lösung gegen einen Grenzwert konvergiert.

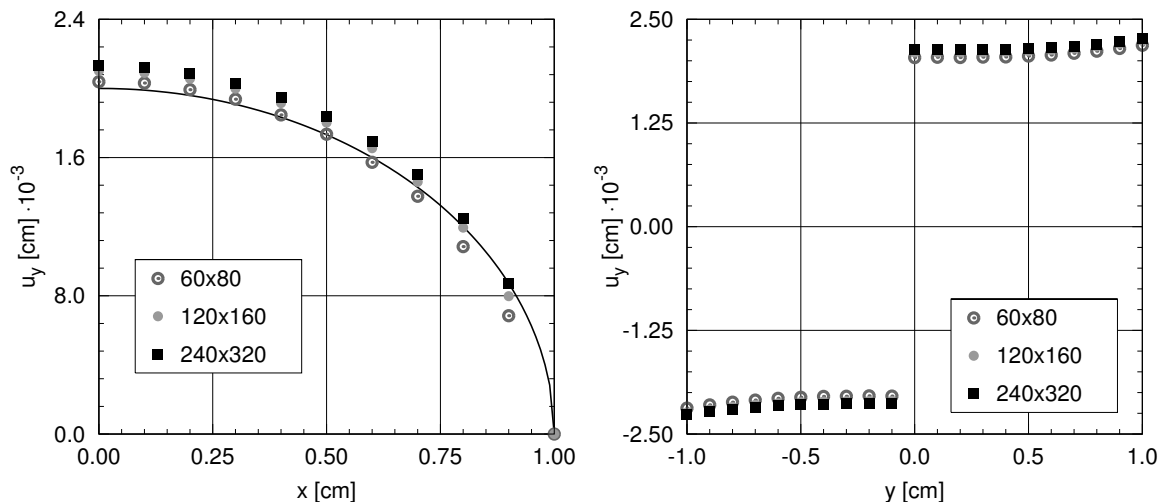


Bild 4.13: Verschiebung $u_y^+(x, y = 0)$ und $u_y^+(x = 0, y)$.

Die Qualität der Näherungslösung kann durch die Wahl geeigneter Anreicherungs-funktionen in der Umgebung der Rißspitze deutlich gesteigert werden. Belytschko, Dolbow und Moës [11, 29, 64] verwenden in der erweiterten Finite-Element-Methode (XFEM) singuläre Anreicherungs-funktionen und sind in der Lage, den Spannungs- und Verzer-rungszustand um die Rißspitze mit höherer Genauigkeit zu beschreiben. Statisches und dynamisches Rißwachstum erfordert die sorgfältige Formulierung geeigneter Modelle für Ausbreitungsrichtung und -inkrement.

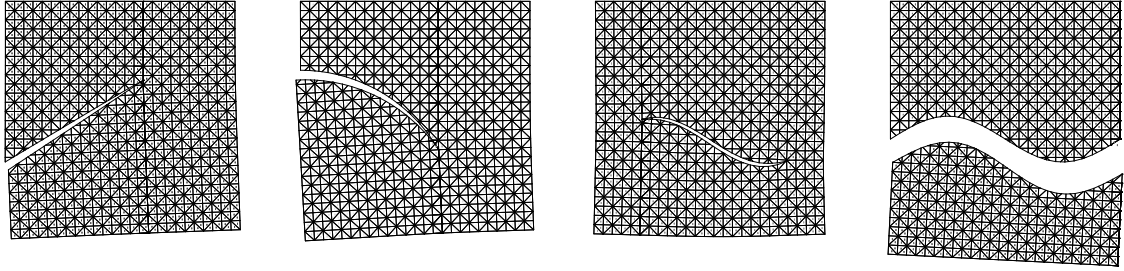


Bild 4.14: Realisierung verschiedener Rißsituationen auf fixiertem Gebietsnetz.

Die implizite Rißbeschreibung mit einer bzw. mehreren Level-Set-Funktionen erlaubt die flexible Definition unterschiedlicher initialer Rißsituationen. Die Anzahl der be-nötigten Level-Set-Funktionen ist abhängig von der Zahl der vorhandenen Rißspitzen und -kanten. Bild 4.14 zeigt die Initialisierung schräger und gekrümmter Rißkanten mit maximal zwei Rißspitzen. Die Gebietsdiskretisierung kann unabhängig von der Positio-nierung sämtlicher Rißkanten und -spitzen erfolgen. Die Kombination von Rißerfassung durch Level-Set-Funktionen und einem einfachen physikalischen Rißfortschrittsmodell stellt Stolarska in [93] vor.

5. Zwei-Fluid-Strömungen

Strömungen mit frei beweglichen Oberflächen oder Grenzflächen treten als Wellen, Tropfen und Blasen, Strahlen oder Filme in der Alltagserfahrung auf. Jede dieser Erscheinungsformen spricht eine Vielzahl physikalischer Phänomene an. Das Verständnis dieser Phänomene unterstützt unter anderem nachhaltig die Entwicklung leistungsfähiger Fertigungsverfahren in Industrie und Forschung und ermöglicht z.B. die Vorhersage von Wellenformen und -einwirkungen auf Konstruktionen des Küsteningenieurwesens und Schiffbaus oder des Verhaltens blasenbehafteter Strömungen in chemischen Reaktoren und Filtern. Gleiches gilt für Formgebungsprozesse flüssiger Metalle, Gußformoptimierung, sowie die industrielle Nutzung von Flüssigkeitsfilmen bei Trocknungs- und Beschichtungsvorgängen in der Herstellung von Polymeren oder Papieren. Die Mehrzahl der oben genannten Strömungen sind echte Zwei-Fluid-Strömungen, da bei Vernachlässigung der Dynamik des zweiten Fluids die in Natur bzw. Experiment beobachtbaren Phänomene nur unvollständig oder überhaupt nicht erfaßt werden können. Dies trifft auch für gasförmige zweite Fluide zu, wie das Beispiel von in Wasser aufsteigenden Luftblasen zeigt. Anstatt Freispiegelströmungen nur eines Fluids, werden daher im folgenden Strömungen zweier an einer gemeinsamen Grenzfläche (Interface) gekoppelter Fluide betrachtet.

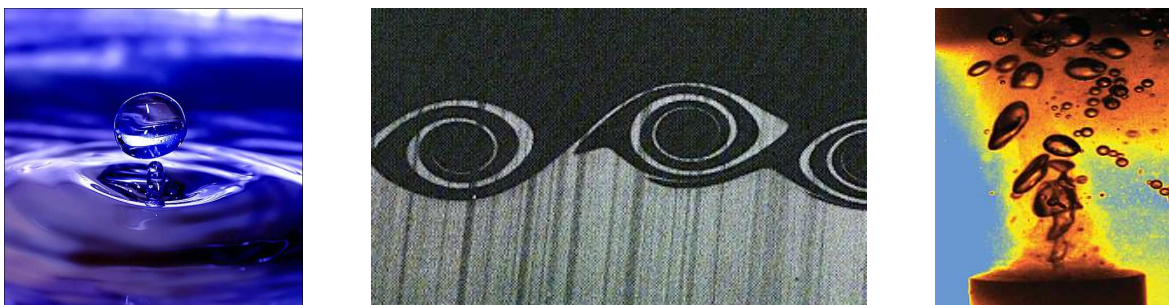


Bild 5.1: Tropfen, Kelvin-Helmholtz-Instabilität, aufsteigende Gasblasen

Die numerische Untersuchung grenzflächenbehafteter Strömungen stellt gerade für physikalische Prozesse sehr kleiner Zeit- und Längenskalen eine Alternative zu aufwendigen Experimenten dar. Auch wenn die Lösungsgüte der zugrundeliegenden Modellgleichungen stark von den verfügbaren Rechnerkapazitäten abhängt, sind in vielen Fällen zumindest qualitative Aussagen über das in der Regel nichtlineare System-

verhalten möglich. Neben der in dieser Arbeit vorgestellten Methodik existiert eine Reihe sehr unterschiedlicher Ansätze zur numerischen Simulation von Zwei-Fluid-Strömungen, über die Scardovelli und Zaleski [82] und Shyy [89] einen zusammenfassenden Überblick geben. Level-Set-basierte Verfahren, die die Modellgleichungen mit Finite-Element-Verfahren lösen, sind u.a. bei Tornberg [104] und Smolianski [90] zu finden. Die Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode verwenden [56] zur Diskretisierung der Modellgleichungen für Zwei-Fluid-Strömungen.

5.1 Modellbildung

Im Mittelpunkt der Betrachtung steht die instationäre Strömung zweier unmischbarer randgekoppelter Fluide (Bild 5.2). Die Strömung ist isotherm. Die Geschwindigkeit der Strömung liegt für die erwähnten Anwendungsbereiche deutlich im Unterschallbereich, so daß die Annahme inkompressibler Fluide gerechtfertigt ist. Die Massebilanzgleichung (1.16) ist mit sowohl räumlich als auch zeitlich unveränderlicher Dichte auf die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes der Strömung

$$\nabla_x \cdot \mathbf{v}^a = 0 \quad (5.1)$$

reduziert. Beide Fluide sind reibungsbehaftet, der Spannungszustand ist mit (1.26) für homogene Newtonsche Fluide angegeben. Dichte und Viskosität sind in jedem Fluid konstant und wechseln sprunghaft am Übergang von Fluid 1 zu Fluid 2, unter Umständen um mehrere Größenordnungen.

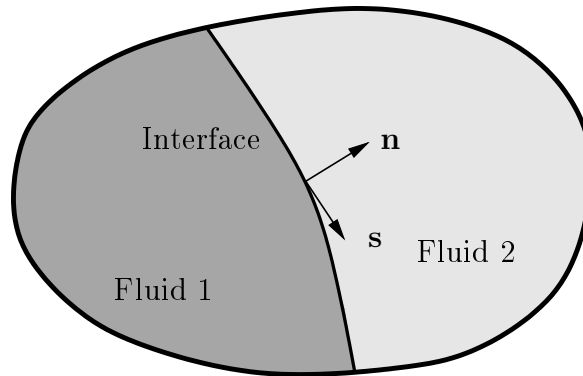


Bild 5.2: Zweifluidströmung – randgekoppelte Fluide.

Gemessen an den Längenskalen der zu untersuchenden Aufgaben ist es zweckmäßig, für den Übergangsbereich zwischen den Fluiden eine infinitesimal kleine Ausdehnung anzunehmen. Dieser Ansatz führt auf die von Gauß, Laplace und Young favorisierte Betrachtung des Interfaces als scharfe Grenzfläche mit der Dicke Null. Gleichgewichtsbetrachtungen der wirkenden Kräfte beruhen auf der Annahme von am Interface

diskontinuierlich verlaufenden physikalischen Größen, wie die Parameter Dichte und Viskosität, siehe Bild 5.3. Die physikalischen Phänomene Oberflächenspannung, Benetzung und Kapillarität sind durch auf dem Interface definierte Nebenbedingungen erklärt. Alternativ zu dieser makroskaligen Sichtweise wird durch Maxwell, Poisson und Gibbs die mikroskalige Betrachtung des Interfaces als Region des stetigen Wechsels der physikalischen Größen vorgeschlagen. Die Unschärfe der Interfaceausdehnung ist ein Hauptnachteil dieses Ansatzes, da weitere Annahmen zur Schließung des Modells notwendig sind. Aus diesem Grund folgt die weitere Herleitung mit der Annahme einer „scharfen“ Grenzfläche und dort plötzlich wechselnden Materialeigenschaften. Die Unmischbarkeit beider Fluide führt auf ein impermeables Interface.

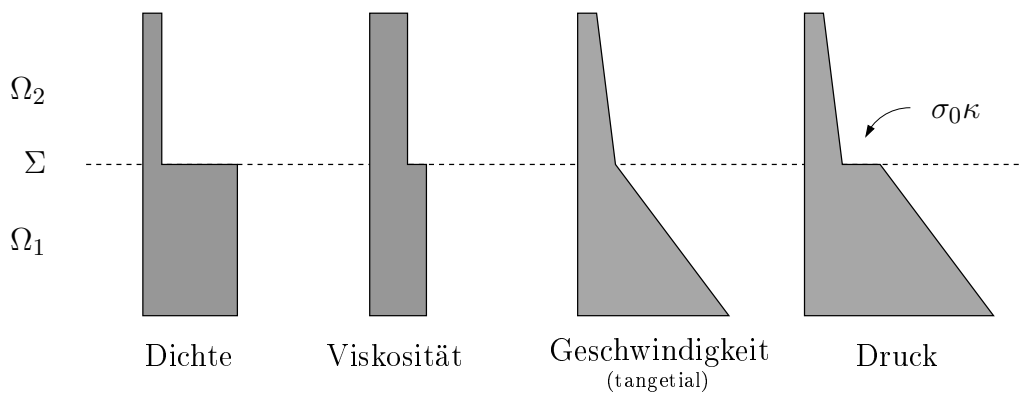


Bild 5.3: Diskontinuierliche Beschreibungsgrößen an der Grenzfläche.

Oberflächenspannung. Effekte aus Oberflächenspannung sind bei Verwendung des Kapillardruckmodells von Young berücksichtigt. Die Normalkomponente des Spannungsvektors am Interface wächst um den Betrag des durch die Oberflächenspannung erzeugten Kapillardrucks p_σ an. Der Kapillardruck

$$p_\sigma = \sigma_0 \kappa \quad (5.2)$$

ist abhängig vom materialbedingten Koeffizienten der Oberflächenspannung σ_0 und der Krümmung κ der Grenzfläche. Der Oberflächenspannungskoeffizient ist entlang des Interfaces als konstant angenommen.

Strömungscharakterisierung. Das Verhältnis von Wirkungen aus Massenträgheit und Reibung gibt die Reynolds-Zahl

$$\text{Re} = \frac{\rho v l}{\mu} \quad (5.3)$$

an, in der die charakteristische Geschwindigkeit v und das charakteristische Längenmaß l berücksichtigt sind. Gleiche Reynolds-Zahlen für Strömungen deuten auf ein ähnliches Systemverhalten bezüglich des Einflusses viskoser Reibung hin. Bei ausreichend

großer Zähigkeit des Fluids kann eine laminare Strömung vorliegen. Der Übergang zum turbulenten Strömungsfeld erfolgt bei Überwiegen der Trägheitskräfte. Den Einfluß der Schwerkraft auf eine Strömung mit freier Oberfläche beschreibt die Froude-Zahl

$$\text{Fr} = \frac{v}{\sqrt{gl}}, \quad (5.4)$$

die Bewegungs- und Lageenergie ins Verhältnis setzt. Das Gravitationsfeld g erzeugt Wellenbewegungen, die für Systeme gleicher Froude-Zahlen geometrisch ähnlich ausfallen. In der Blasendynamik erfaßt die Eötvös-Zahl

$$\text{Eo} = \frac{g\Delta\rho d^2}{\sigma_0} \quad (5.5)$$

die Wechselwirkung zwischen Schwerkraften und Kapillarkräften. Hierin entspricht der Äquivalenzdurchmesser d dem Durchmesser einer der Blase volumengleichen Kugel und $\Delta\rho$ der Dichtedifferenz von umgebendem und eingeschlossenem Fluid. Die Morton-Zahl verknüpft Reibungskräfte, Trägheitskräfte und Kapillarkräfte

$$\text{Mo} = \frac{g\mu^4\Delta\rho}{\rho^2\sigma^3}, \quad (5.6)$$

wobei ρ und μ die Dichte und Viskosität des umgebenden Fluids sind, und beschreibt ein bestimmtes Zweifluidsystem mit dessen Materialeigenschaften.

Zeitskalen. Neben den dimensionslosen Kennzahlen ist jede Grenzflächenströmung durch eine spezifische Zeitskala charakterisiert. Die Zeitskala eines Systems ist von der konkreten Problemstellung abhängig und durch das dominante physikalische Phänomen des Prozesses (Gravitation, Zähigkeit, Kapillarität) gegeben. Die Froude-Zahl $\text{Fr} = 1$ führt auf die typische Zeitskala

$$\Delta t_g = \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (5.7)$$

für durch Schwerkraft dominierte Zwei-Fluid-Strömungen. Die Wirkung der Oberflächenspannung in viskosen Strömungen ist mit der Reynolds-, Eötvös- und Morton-Zahl charakterisiert. Das Verhältnis der Zähigkeitskräfte und Kapillarkräfte bestimmt die Zeitskala

$$\Delta t_\sigma = \frac{\mu l}{\sigma} \quad (5.8)$$

der durch Oberflächenspannungseffekte geprägten Strömung. Die Reynolds-Zahl $\text{Re} = 1$ liefert die viskose Zeitskala

$$\Delta t_v = \frac{\rho l^2}{\mu} \quad (5.9)$$

für Prozesse, bei denen Zähigkeitskräfte die Trägheitskräfte überwiegen. Zur Erfassung aller physikalischen Effekte des zu betrachtenden dynamischen Systems ist eine Zeitschrittweite der numerischen Simulation $\Delta t_{\text{num}} \leq \min(\Delta t_g, \Delta t_\sigma, \Delta t_v)$ zu wählen, die die Zeitskalen der abzubildenden Effekte nicht übersteigt.

5.2 Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung

Die zeitdiskontinuierliche Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung der mit den in Abschnitt 5.1 aufgeführten Modellannahmen für inkompressible und reibungsbehaftete Zwei-Fluid-Strömungen mit Oberflächenspannung ergänzten gewichteten Integralform (1.35) lautet

$$\sum_{i=1}^2 \int_{Q_{i,n}^x} \delta p_i \nabla_x \cdot \mathbf{v}_i \, dQ^x \quad (5.10a)$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \rho_i \int_{Q_{i,n}^x} \delta \mathbf{v}_i \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \Big|_x + \mathbf{v}_i \cdot \nabla_x \mathbf{v}_i - \mathbf{b}_i \right) \, dQ^x \quad (5.10b)$$

$$+ \sum_{i=1}^2 2\mu_i \int_{Q_{i,n}^x} \mathbf{D}(\delta \mathbf{v}_i) : \mathbf{D}(\mathbf{v}_i) \, dQ^x - \sum_{i=1}^2 \int_{Q_{i,n}^x} \nabla_x \cdot \delta \mathbf{v}_i p_i \quad (5.10c)$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \rho_i \int_{\Omega_{i,n}^x} \delta \mathbf{v}_i(t_n^+) \cdot (\mathbf{v}_i(t_n^+) - \mathbf{v}_i(t_n^-)) \, d\Omega^x \quad (5.10d)$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \int_{P_{D,i,n}^x} \delta \mathbf{t}_i \cdot (\mathbf{v}_i - \bar{\mathbf{v}}_i) \, dP^x - \sum_{i=1}^2 \int_{P_{D,i,n}^x} \delta \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{t}_i \, dP^x \quad (5.10e)$$

$$- \sum_{i=1}^2 \int_{P_{N,i,n}^x} \delta \mathbf{v}_i \cdot \bar{\mathbf{t}}_i \, dP^x \quad (5.10f)$$

$$+ \int_{R_n^x} \delta \tilde{\mathbf{t}}_1 \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \, dR^x \quad (5.10g)$$

$$- \int_{R_n^x} \delta \mathbf{v}_1 \cdot \tilde{\mathbf{t}}_1 \, dR^x + \int_{R_n^x} \delta \mathbf{v}_2 \cdot (\tilde{\mathbf{t}}_1 - \mathbf{N}^T \tilde{\mathbf{t}}) \, dR^x \quad (5.10h)$$

$$= 0 \quad \forall \delta p_i, \delta \mathbf{v}_i, \delta \mathbf{t}, \delta \tilde{\mathbf{t}}$$

für die Raum-Zeit-Scheibe $Q_{i,n}^x = \Omega_i^x \times I_n$ mit dem Dirichlet-Rand $P_{D,i,n}^x$, sowie dem Neumann-Rand $P_{N,i,n}^x$ und der gemeinsamen Grenzfläche R_n^x in der Momentankonfiguration \mathcal{K}^x der Betrachtungsweise nach Euler. Im Sinne besserer Lesbarkeit entfallen die hochgestellten Indizes zur Kennzeichnung von Abbildung und Bezugskonfiguration der physikalischen Größen.

Die schrittweise Auswertung der Integralform (5.10) erfolgt für alle Zeitscheiben Q_n^x . Die Anfangsbedingung (1.28) ist mit dem Sprungterm des zeitdiskontinuierlichen Galerkin-Verfahrens in Zeile (5.10d) berücksichtigt. Die in Abschnitt 5.1 getroffenen Annahmen zur Dichtekonstanz in jedem Fluid i führen mit $\delta \rho_i = 0$ auf die aus (1.35)

abgeleitete gewichtete Integralform (5.10), die die unbekannten Zustandsgrößen Geschwindigkeit und Druck verwendet.

Eine Diskussion der schwachen Form der Bestimmungsgleichungen im Gebiet (5.10a)-(5.10d) und auf dem äußeren Rand (5.10e)-(5.10f) ist bei Walhorn [106] zu finden. Darüberhinaus beinhaltet Zeile (5.10g) die mit der Variation der Spannungen am Kopplungsrand gewichtete integrale Formulierung der Bedingung (1.33) für den Massefluß über die Grenzfläche, die infolge der Impermeabilitätsannahme zur geometrischen Übergangsbedingung wird, die stetige Geschwindigkeiten an der Grenzfläche fordert. Der erste Term in Zeile (5.10h) resultiert aus partieller Integration der Impulsbilanzen für beide Fluide und führt die Spannung von Fluid 1 am Kopplungsrand als Unbekannte ein. Der zweite Term dieser Zeile repräsentiert die schwache Form der Übergangsbedingung (1.34) für den Impuls nach partieller Integration der Impulsbilanzen. Der Vektor $\check{\mathbf{t}}$ beinhaltet Änderungen des Spannungszustandes an der Grenzfläche in Normal- und Tangentialrichtung. Effekte aus Oberflächenspannung sind mit der Definition

$$\check{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} \sigma_0 \kappa \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

im Verfahren berücksichtigt. Damit ist der Term der Oberflächenspannung allein aus der Betrachtung randgekoppelter Fluide motiviert und mit der schwachen Form der Modellgleichungen für die numerische Lösung erschlossen. Alternative diffusive Konzepte wie die von Brackbill [16] eingeführte Continuum-Surface-Method (CSF) werden so vermieden.

Stabilisierung. Die schwache Form der Modellgleichungen ist mit Termen der in Abschnitt 1.4 motivierten Galerkin-/Least-Squares-Stabilisierung

$$+ \sum_{i=1}^2 \sum_{e_i} \int_{Q_{i,n}^x} \tau_{M,i} \rho_i \mathcal{L}_M(\delta \mathbf{v}_i) \mathcal{L}_M(\mathbf{v}_i) \, dQ^x \quad (5.12a)$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \sum_{e_i} \int_{Q_{i,n}^x} \tau_{I,i} \frac{1}{\rho_i} \mathcal{L}_I(\delta \mathbf{v}_i, \delta p_i) \cdot (\mathcal{L}_I(\mathbf{v}_i, p_i) - \rho_i \mathbf{b}_i) \, dQ^x \quad (5.12b)$$

$$+ \sum_{e_R} \int_{Q_n^x} \tau_K \mathcal{L}_K(\delta \mathbf{v}_i, \delta p_i, \delta \check{\mathbf{t}}) \cdot \mathcal{L}_K(\mathbf{v}_i, p_i, \check{\mathbf{t}}) \, dR^x \quad (5.12c)$$

ergänzt. Die Operatoren

$$\mathcal{L}_M(\mathbf{v}_i) = \nabla_x \cdot \mathbf{v}_i \quad (5.13)$$

$$\mathcal{L}_I(\mathbf{v}_i, p_i) = \rho_i \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} \Big|_x + \mathbf{v}_i \cdot \nabla_x \mathbf{v}_i \right) - \nabla_x \cdot 2\mu_i \mathbf{D}(\mathbf{v}_i) + \nabla_x p_i \quad (5.14)$$

$$\mathcal{L}_K(\mathbf{v}_i, p_i, \mathbf{t}_i) = \mathbf{T}(\mathbf{v}_i, p_i) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}_i \quad (5.15)$$

bezeichnen hierin Residuen in differentieller Form. Gleichung (5.13) repräsentiert das Residuum der Massebilanz (5.1) und (5.14) das Residuum der Impulsbilanz (1.17), in die die Konstitutivgleichung Newtonscher Fluide (1.26) eingeht. Die Definition des Cauchy-Spannungstensors in Residuenform liegt mit (5.15) vor.

Für weitergehende Ausführungen zur Notwendigkeit einer Stabilisierung finiter Elemente für konvektionsdominante Strömungen und bei Anwendung ordnungsgleicher Ansätze für Druck und Geschwindigkeit wird auf die Arbeiten von Hübner [45] und Walhorn [106] verwiesen. Die dort vorgestellten Vorschriften zur Bestimmung der Parameter τ_M und τ_I zur Wichtung der Stabilisierungsterme finden hier Verwendung. Der Stabilisierungsparameter τ_K wird nach (3.24) bestimmt und wichtet die Stabilisierung des implizit formulierten Lagrange-Multiplikators $\tilde{\mathbf{t}}$.

Grenzfläche und angereicherte Ansatzfunktionen. Die in Abschnitt 2.2 eingeführte Level-Set-Funktion ϕ beschreibt die der Fluidodynamik unterworfenen Grenzfläche R . Mit Lösung der Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung (2.23) der Level-Set-Gleichung (2.16) liegt die Grenzfläche als zu jedem Zeitpunkt diskret bestimmbares Null-Niveau der Level-Set-Funktion vor, die darüberhinaus der Unterscheidung der Fluidgebiete dient.

Auf einer topologisch unveränderten Geometrieapproximation des gesamten Strömungsgebietes gelten die in Abschnitt 3.2.3 eingeführten erweiterten Ansatzfunktionen für die Beschreibungsgrößen \mathbf{v} , p und $\tilde{\mathbf{t}}$. Die angereicherte Finite-Element-Basis auf Grundlage der Level-Set-Funktion ϕ erlaubt entlang der Kopplungsfläche diskontinuierliche Beschreibungsgrößen. Der Lagrange-Multiplikator $\tilde{\mathbf{t}}$ erzwingt die geometrischen Übergangsbedingungen und liefert Informationen über die Spannungen am Interface.

5.3 Wasserwelle in ruhendem Behälter

Die Eignung des vorgestellten Verfahrens zur Beschreibung des zeitabhängigen Verhaltens von Schwerewellen ist anhand einer stehenden sinusförmigen Fluidgrenzfläche in einem ruhenden Behälter zu untersuchen.

In einem Behälter der Breite $L = 100$ cm und Höhe $H = 150$ cm, siehe Bild 5.4, befinden sich zwei unmischbare Fluide in Ω_1 und Ω_2 mit den Dichten $\rho_1 = 1$ g/cm³ und

$\rho_2 = 10^{-3} \text{ g/cm}^3$. Beide Fluide sind reibungsbehaftet und besitzen die dynamischen Viskositäten $\mu_1 = 10 \text{ g/s/cm}$ bzw. $\mu_2 = 0.1 \text{ g/s/cm}$. Oberflächenspannungseffekte sind vernachlässigt ($\sigma_0 = 0$). Die freie Grenzfläche zwischen beiden Flüssigkeiten beschreibt zum Zeitpunkt $t = 0 \text{ s}$ eine Sinusfunktion der Amplitude a und Wellenlänge $\lambda = 2L$. Fluid 1 besitzt einen Ruhespiegel von $d = 100 \text{ cm}$ und unterliegt der konstanten Erdbeschleunigung $g = 100 \text{ cm/s}^2$. An den Behälterwänden sind Gleitrandbedingungen angenommen, während entlang der offenen oberen Behälterseite das Druckniveau $p = 0$ gesetzt ist. Die Diskretisierung erfolgt mit 1160 finiten Raum-Zeit-Elementen.

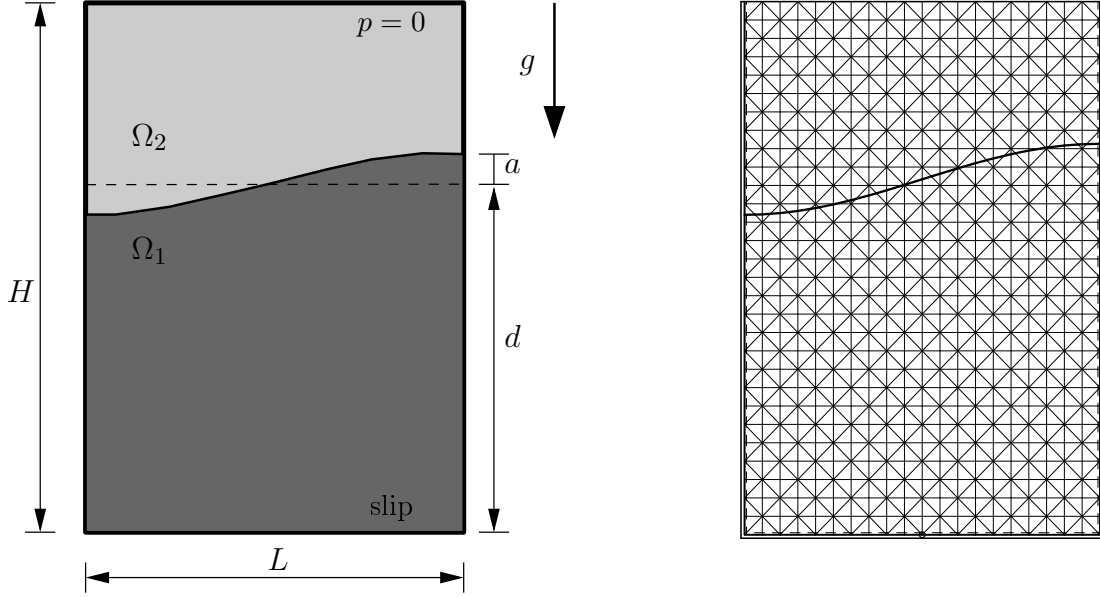


Bild 5.4: System mit anfänglicher Gebietsverteilung und Diskretisierung.

Für gegenüber dem Ruhespiegel d kleine Wellenamplituden a ist das Verhalten eines reibungsfreien Fluidsystems mit der linearen Wellentheorie [101] hinreichend genau beschreibbar. Sind beide Fluide als reibungsfrei angenommen, unterliegt die Auslenkung $\mu(x, t) = a \sin(\omega t + kx)$ jedes Punktes der freien Oberfläche einer harmonischen Schwingung konstanter Amplitude mit der Dispersionsrelation $\omega = \sqrt{gk \tanh kd}$, der Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ und der Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Die untersuchten viskosen Fluide hingegen verursachen eine mit der Zeit abklingende Auslenkung der Oberflächenpunkte und eine verringerte Frequenz der Schwingung um die Ruhelage.

Bild 5.5 zeigt die zeitliche Entwicklung der Oberflächenauslenkung am linken und rechten Behälterrand für die Anfangsauslenkung $a = \frac{d}{100}$ im Vergleich zur Lösung nach linearer Wellentheorie für reibungsfreie Fluide. Die mit einer Zeitschrittweite $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ erzielte numerische Lösung zeigt den erwarteten Amplitudenabfall in der Zeit infolge viskoser Reibung, die Frequenz ist mit $f_N = 0.27 \text{ Hz}$ verschieden zur analytischen Lösung im reibungsfreien Fall ($f_F = 0.28 \text{ Hz}$). Weiterhin ist die stetige

Transformation zwischen Lageenergie und kinetischer Energie sowie die Dissipation im System infolge viskoser Dämpfung gezeigt. Der Erhalt der Gesamtenergie unterliegt dem Abbruchfehler des Zeitintegrationsverfahrens.

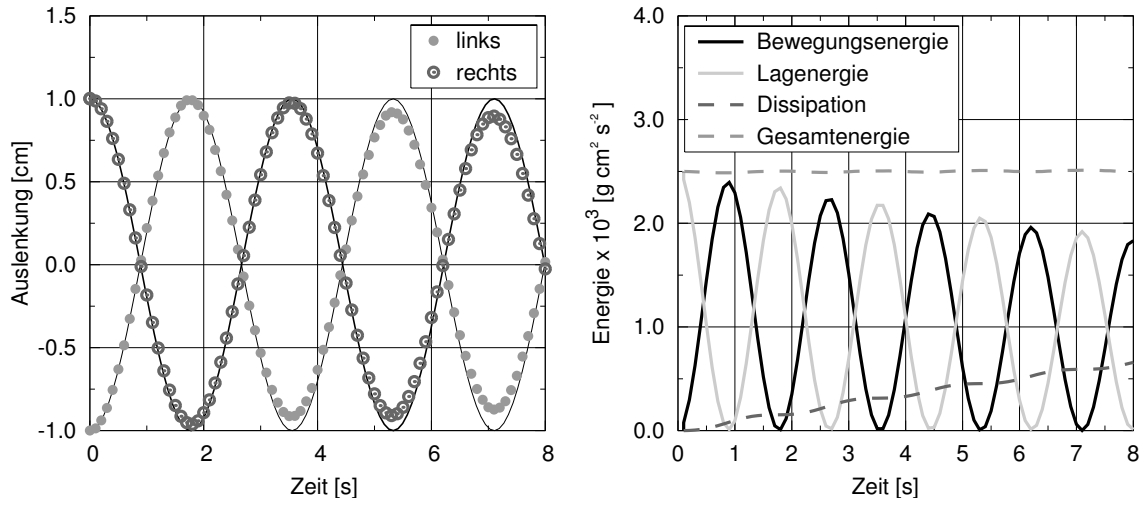


Bild 5.5: Oberflächenauslenkung und Energieformen des Systems.

Der Verlauf der Oberflächenauslenkung für eine alternative Anfangsamplitude von $a = \frac{d}{10}$ ist am Anfang des Beobachtungszeitraums deutlich nichtlinear (Bild 5.6) und weist im Frequenzspektrum Oberschwingungen auf. Die Oberschwingungen werden durch die Viskosität der Fluide frühzeitig gedämpft und das Schwingungsverhalten gleicht dem des Systems mit geringerer Anfangsauslenkung.

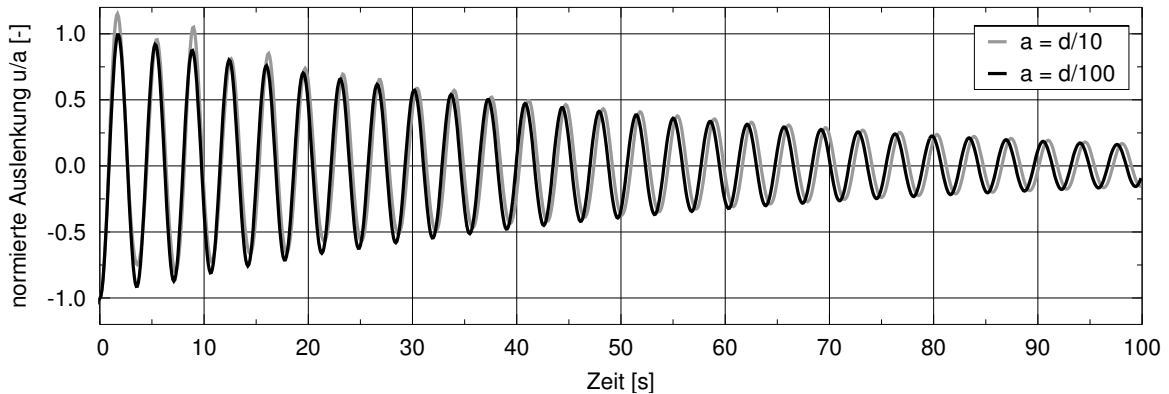


Bild 5.6: Oberflächenauslenkung an der linken Behälterwand.

Die Anreicherung des Ansatzraumes für Druck und Geschwindigkeit gewährleistet stabile Lösungen auch bei grober Diskretisierung. Der durch die Fluidwichte verursachte Gradientensprung des Drucks normal zur Grenzfläche kann mit der Anreicherung abgebildet werden. Alternative Verfahren benötigen an dieser Stelle vielfach ein lokal feinauflösendes Berechnungsnetz [77, 33]

5.4 Dammbruch - kollabierende Wassersäule

Anhand des Beispiels einer kollabierenden Wassersäule kann eine Validierung des Zweifluidmodells für trägheitsdominierte Strömungszustände durchgeführt werden. In einem am oberen Rand offenen Behälter (Skizze des Systems in Bild 5.7) mit den Maßen $L = 58.4$ cm und $H = 45.0$ cm befindet sich Wasser ($\rho_1 = 1.0$ g/cm³, $\mu_1 = 10^{-2}$ g/s/cm) im Gebiet Ω_1 und Luft ($\rho_2 = 10^{-3}$ g/cm³, $\mu_2 = 10^{-4}$ g/s/cm) in Ω_2 . Zu Beginn des Prozesses besitzt das Wasser die Form einer Säule der Breite $a = 14.6$ cm und der Höhe $b = 2a$, die seitlich von einer Platte gestützt wird. Wirkungen aus Oberflächenspannung können in erster Näherung vernachlässigt werden.

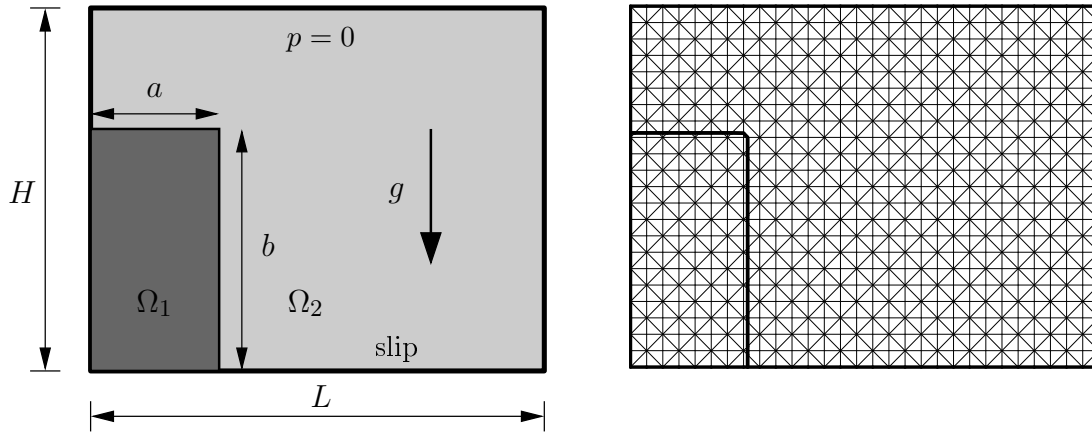


Bild 5.7: System mit anfänglicher Gebietsverteilung und Diskretisierung Netz I.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ s wird die Platte entfernt und die Erdbeschleunigung $g = 981$ cm/s² veranlaßt die Wassersäule, einen Zustand minimaler potentieller Energie anzustreben. Hierzu findet die Transformation von Lageenergie in kinetische Energie statt; die Wassersäule fällt zusammen. Der Energieaustrag aus dem System infolge der Viskosität der Fluide ist zu diesem Zeitpunkt unbedeutend. Nach hinreichend langer Beobachtungszeit kommt das Wasser infolge viskoser Dämpfung zur Ruhe und bedeckt schließlich den gesamten Behälterboden mit konstanter Höhe.

Das Berechnungsgebiet wird regelmäßig mit Dreieckselementen diskretisiert. Die Berechnung erfolgt auf einem groben Netz I (30×23 Knoten) und einem feinen Netz II (120×92 Knoten). Die Anfangslage der Fluide ist mit der initialen Level-Set-Funktion vorgegeben. An den Wänden des Behälters sind Gleitrandbedingungen appliziert. Das zeitliche Verhalten des dynamischen Systems wird mit einem konstanten Zeitschritt $\Delta t = 0.01$ s untersucht.

Bild 5.9 zeigt die Druck- und Geschwindigkeitsfelder der Zwei-Fluid-Strömung zu unterschiedlichen Zeitpunkten auf Netz I. Die freie Oberfläche wird zu allen Zeiten hinreichend genau aufgelöst. Die lokale Anreicherung von Geschwindigkeit und Druck

ermöglicht die Erfassung C_1 -unstetiger Beschreibungsvariablen (z.B. Druckfeld aus Gravitation) auf bewegten Grenzflächen.

Der quantitative Vergleich mit existierenden experimentellen und numerischen Ergebnissen erfolgt durch die Betrachtung des Zeitverlaufs charakteristischer und praktisch meßbarer Größen. Geeignet hierfür ist die zeitabhängige Lage der am Behälterboden fortschreitenden Wellenspitze und die Position des freien Wasserspiegels am linken Behälterrand. Mit der Verwendung der dimensionslosen Zeit $\tau_\delta = t\sqrt{2g/a}$, $\tau_\beta = t\sqrt{2g/b}$ und Verschiebung $\delta = x/a$, $\beta = y/b$ ist der Vergleich mit Ergebnissen aus der Literatur möglich.

Bild 5.8 zeigt eine sehr gute Übereinstimmung der Berechnung mit den Resultaten anderer numerischer Verfahren. Besonders hervorzuheben ist die Nähe zu Front-Tracking-basierenden Vorgehensweisen [106], aber ebenso zu Verfahren mit Volume-of-Fluid-Ansatz [81]. Die Wasserspitze bewegt sich nach der Mehrzahl der numerischen Ergebnisse zu Beginn der Beobachtung schneller als im Experiment nach Martin und Moyce [61], während die Frontgeschwindigkeit im späteren Verlauf nahezu konstant bleibt. Schwierigkeiten bei der experimentellen Positionsbestimmung der Spitze der Hauptwellenfront können hierfür ausschlaggebend sein. Die Resultate für die Position der Wasserspitze von Hansbo [39], der ein Zeitintegrationsverfahren erster Ordnung verwendet, stimmen zu Beginn des Kollapses gut mit dem Experiment überein, können den quadratischen Verlauf zu späteren Zeitpunkten jedoch nur unzureichend abbilden.

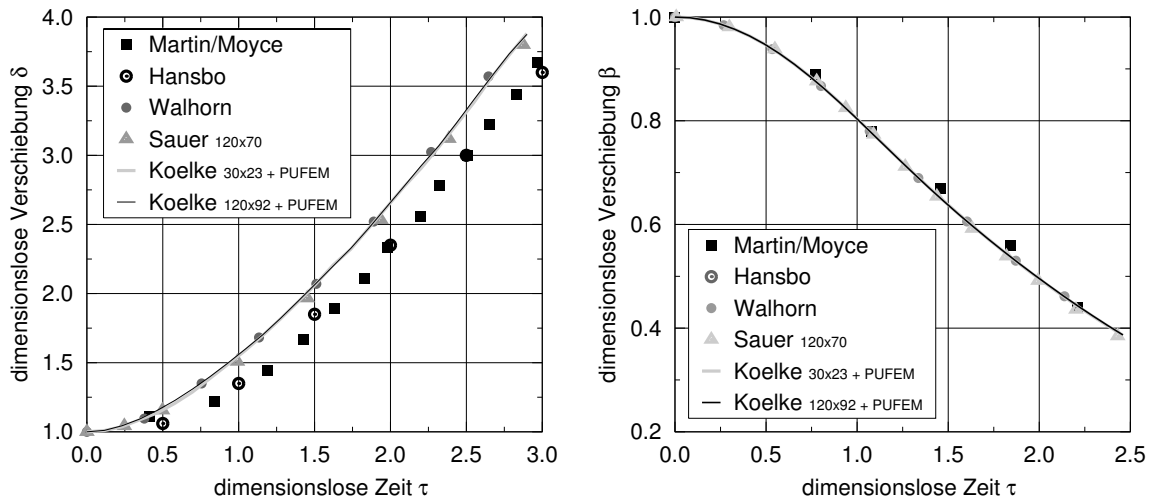
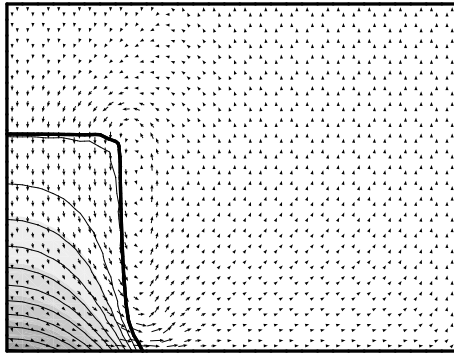


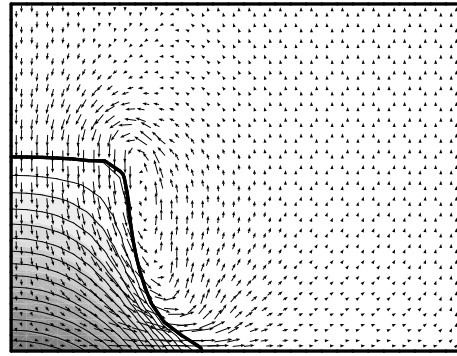
Bild 5.8: Horizontal- und Vertikalverschiebung.

Die Berechnungen unter Verwendung der Netze I und II liefern im Hinblick auf den Zeitverlauf der dimensionslosen Kenngrößen nahezu identische Ergebnisse. Ein konvergentes Verhalten des Verfahrens liegt somit vor. Die systematischen Abweichungen zur experimentellen Untersuchung sind in ungenauen Meßergebnissen bzw. einer Zeitver-

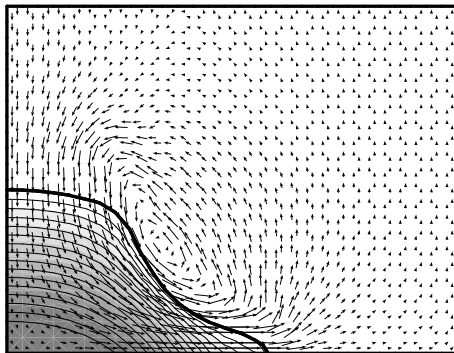
schiebung begründet, da die anfangs stützende Seitenwand nur in endlicher Zeit entfernt werden kann. Einzelaufnahmen des mit der numerischen Simulation gewonnenen Zeitverlaufs des Prozesses zeigt Bild 5.9. Schon mit einer sehr groben Diskretisierung ist das die Level-Set-Methode und eine lokale Ansatzanreicherung verknüpfende Verfahren in der Lage, die wesentlichen physikalischen Effekte dieses Systems zu beschreiben.



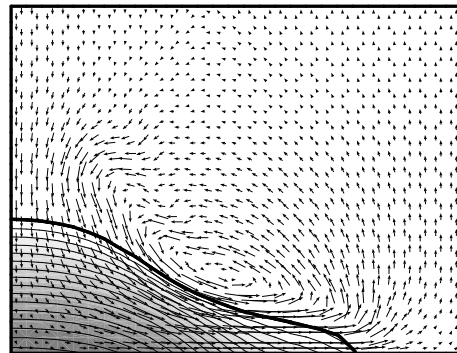
(a) $t = 0.05\text{s}$



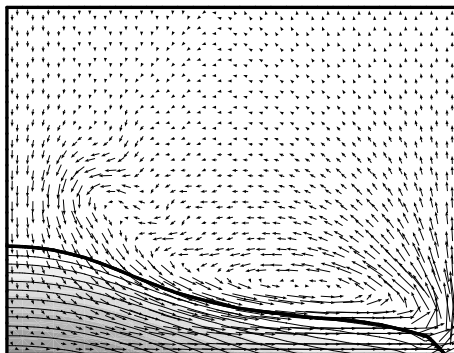
(b) $t = 0.10\text{s}$



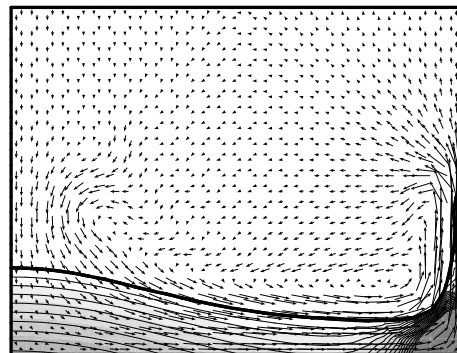
(c) $t = 0.15\text{s}$



(d) $t = 0.20\text{s}$



(e) $t = 0.25\text{s}$



(f) $t = 0.30\text{s}$

Bild 5.9: Entwicklung der kollabierenden Wassersäule, Druck und Geschwindigkeit.

5.5 Aufsteigende Gasblase

Eine kreisförmige Gasblase ist in einem rechteckigen Gefäß der Höhe H und der Breite B positioniert, siehe Bild 5.10. Die Blase besitzt den Durchmesser d und ist von einer viskosen Flüssigkeit ($\rho_1 = 1.0 \text{ g/cm}^3, \mu_1 = 3.162 \cdot 10^{-1} \text{ g/s/cm}$) umgeben. Das Fluid der Blase ($\rho_2 = 10^{-3} \text{ g/cm}^3, \mu_2 = 3.162 \cdot 10^{-3} \text{ g/s/cm}$) ist wie das umgebende Fluid inkompressibel. Das vorliegende Zweifluidsystem besitzt mit dem Koeffizienten der Oberflächenspannung $\sigma_0 = 1.0 \text{ g cm}^2/\text{s}^2$ die Morton-Zahl $\text{Mo} = 10^{-2}$. Das Dichteverhältnis der Fluide entspricht dem von Wasser und Luft, die Fluide sind jedoch deutlich zäher.

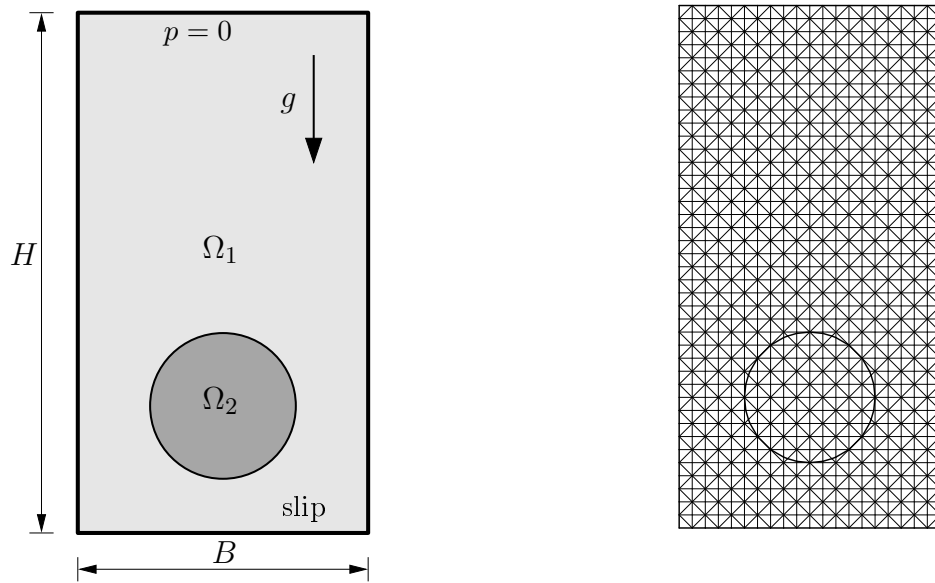


Bild 5.10: System mit anfänglicher Gebietsverteilung und Diskretisierung Netz I.

Im Grenzfall einer ruhenden Blase ($g = 0$) liegt in beiden Fluiden ein konstantes Druckfeld vor, das an der gemeinsamen Grenzfläche um den Betrag des Kapillardrucks ansteigt. Beide Fluide bleiben in Ruhe. Die Ergebnisse der numerischen Berechnungen ohne und mit Anreicherung der physikalischen Beschreibungsgrößen Druck und Geschwindigkeit zeigt Bild 5.11. Ohne die Anreicherung entlang der Grenzfläche, kann das Druckfeld im Gebiet nur stetig approximiert werden und bildet den Drucksprung durch einen netzabhängigen Gradienten ab, siehe Bild 5.11(a). Der endliche Druckgradient verursacht ein unphysikalisches Geschwindigkeitsfeld. Diese Störungen (spurious currents) können bei sensiblen Aufgaben, wie die der Blasendynamik, sinnvolle Ergebnisse einer numerischen Simulation verhindern. Die Anreicherung der Druckapproximation am Interface ermöglicht die diskrete Abbildung aller C_0 - und C_1 -Diskontinuitäten und vermeidet unphysikalische Geschwindigkeitsfelder, siehe Bild 5.11(b).

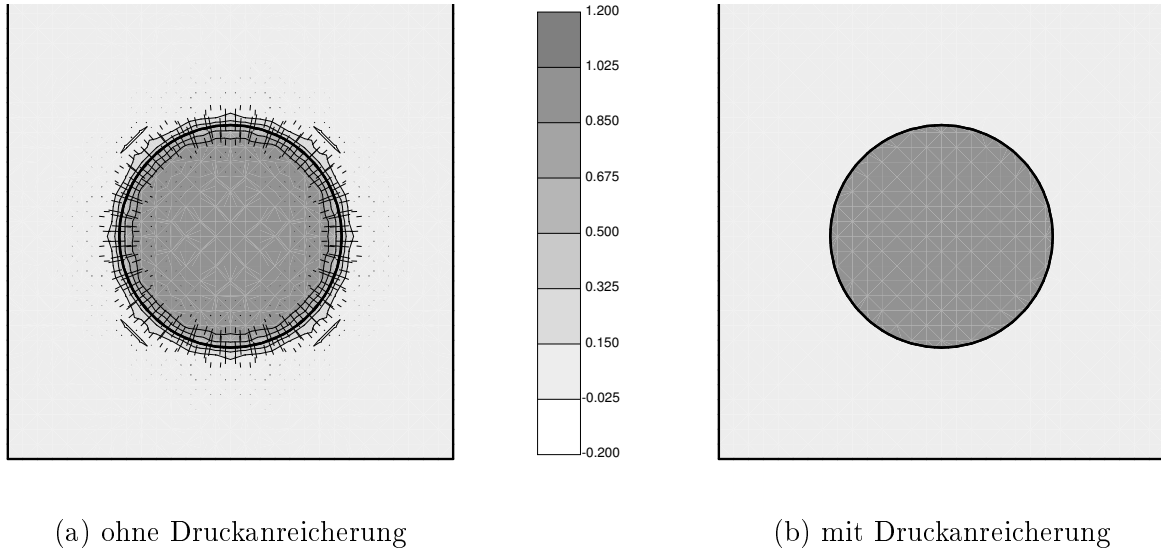


Bild 5.11: Stationäre Blase: Druckfeld und Geschwindigkeitsfeld (10-fach überhöht)

Als Folge der Beschleunigung $g = 1 \text{ cm/s}^2$ steigt die Blase in der umgebenden Flüssigkeit auf. Dabei eintretende Formänderungen der Blase sind unter den gegebenen Bedingungen vom Blasendurchmesser abhängig. Den experimentell gewonnenen Zusammenhang zwischen Blasenform und den in die Eötvös-Zahl eingehenden Blasendurchmesser eines spezifischen Zweifluidsystems zeigt das aus Oertel [69] bzw. Clift [26] entnommene Bild 5.12. Im Bereich kleiner Eötvös-Zahlen besitzt die Blase die Form einer Kugel (sphärisches Regime), da aufgrund der starken Oberflächenkrümmung die Kapillarkräfte groß sind und die Blase stabilisieren. Mit zunehmendem Blasendurchmesser wachsen die Auftriebskräfte an, während die Wirkung der Oberflächenspannung abnimmt (elliptisches Regime). Für große Eötvös-Zahlen überwiegen Schwerkraft und Kapillarkräfte besitzen keinen Einfluß auf die Blasengestalt. In diesem als Kugelkappen-Regime bezeichneten Bereich ist die Blasenform zusätzlich stark abhängig vom Verhältnis der Zähigkeits- und Auftriebskräfte.

Das Verhalten einer aufsteigenden Gasblase wird für die Anfangsdurchmesser $d = \{1.0, 3.2, 10.0, 32.0\}$ und den Systemabmessungen $H = 4d$ und $B = 2d$ untersucht. Die Fluideigenschaften ρ und μ und die Beschleunigung g bleiben dabei unverändert. Die Berechnung ist auf drei verschiedenen Netzen realisiert. Das grobe Netz I mit $20 \times 40 \times 2$ Dreieck-Elementen ist regelmäßig und in Bild 5.10 angegeben. Zwei weitere feinere Netze ($40 \times 80 \times 2$) und ($60 \times 120 \times 2$) folgen diesem Diskretisierungsschema. An den Rändern des Behälters gelten Gleitrandbedingungen. Entlang der Oberkante ist der Druck mit $p = 0$ vorgegeben. Die Zeitschrittweite $\Delta t = \{0.037s, 0.028s, 0.037s, 0.061s\}$ ist an der maßgebenden Zeitskala orientiert.

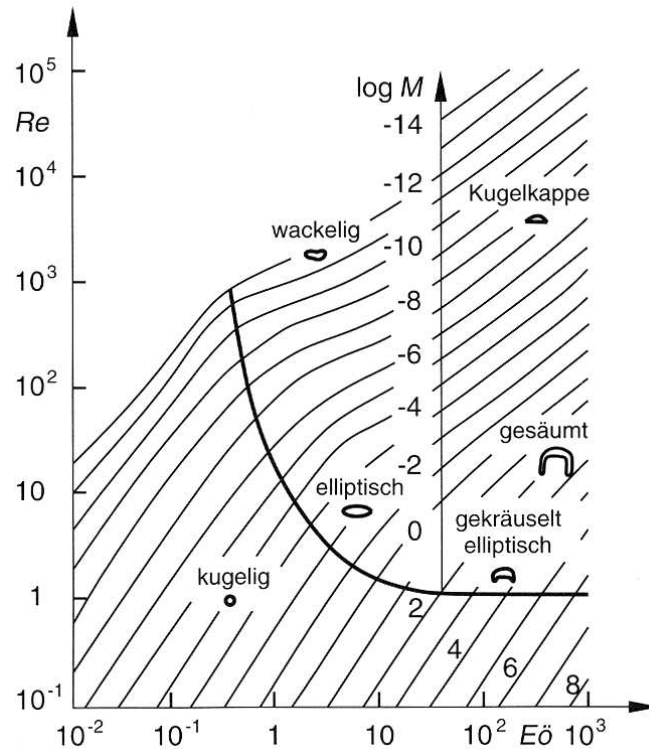
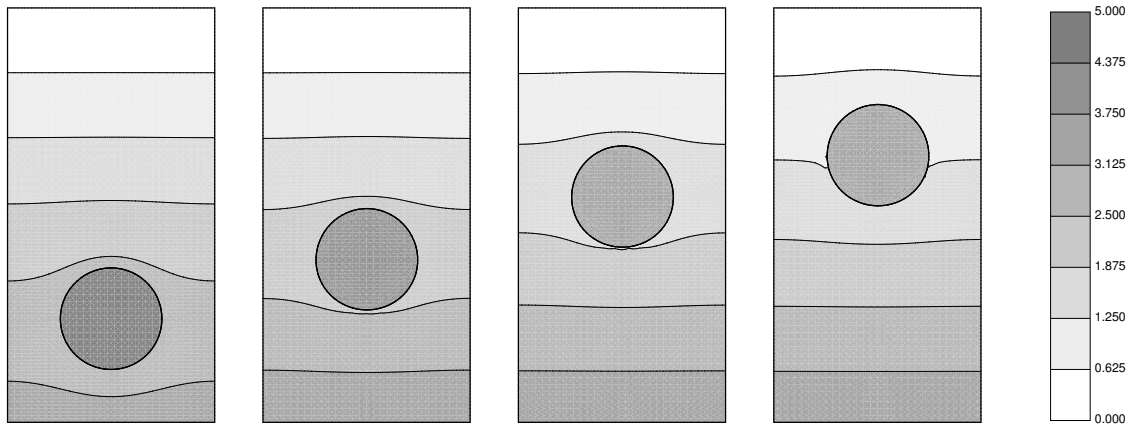


Bild 5.12: Formen aufsteigender Blasen in einer Flüssigkeit [26].

Für die Eötvös-Zahlen $Eo = 10^0$, $Eo = 10^1$ und $Eo = 10^3$ ist in Bild 5.13 die zeitliche Entwicklung des Blasenanstiegs angegeben. Bei sehr kleinem Durchmesser ($Eo = 10^0$) erhält die Blase ihre Kugelform. Die Auftriebskräfte überwiegen gegenüber den Widerstandskräften aus viskoser Reibung. Die Blase steigt gleichmäßig beschleunigt mit der Reynoldszahl $Re = 0.64$ auf. In der Blase herrscht infolge des Kapillardrucks ein Überdruck, der die Kugelform stabilisiert. Der Drucksprung am Interface ist während der gesamten Aufstiegsbewegung präsent und wird vom Lösungsverfahren diskret widergegeben. Die Blase mit $Eo = 10^1$ besitzt einen mittelgroßen Durchmesser und steigt in Ellipsenform auf. Bedingt durch reduzierte Oberflächenspannungswirkungen deformiert die Blase im Strömungsfeld ($Re = 8.6$). Im Vergleich zum Druckzustand des umgebenden Fluids herrscht auch in dieser Blase ein Überdruck, der mit einem Drucksprung an der Grenzfläche verbunden und korrekt abgebildet ist. Blasen mit sehr viel größerem Durchmesser sind starken Gestaltänderungen unterworfen. In der Konfiguration mit $Eo = 10^3$ verformt sich die Blase in einem ersten Schritt zur Kugelkappe. Die stabilisierende Wirkung der Oberflächenspannung ist nun nicht mehr vorhanden. Der Aufstieg der Blase ist von Auftriebskräften in laminarer Umströmung mit $Re = 395$ dominiert. Im weiteren Verlauf lösen Teile der Blase ab und rufen eine Änderung der Blasentopologie hervor. Die verbleibende Hauptblase ist kleineren Volumens und steigt als gekräuselte Kugelkappe auf.

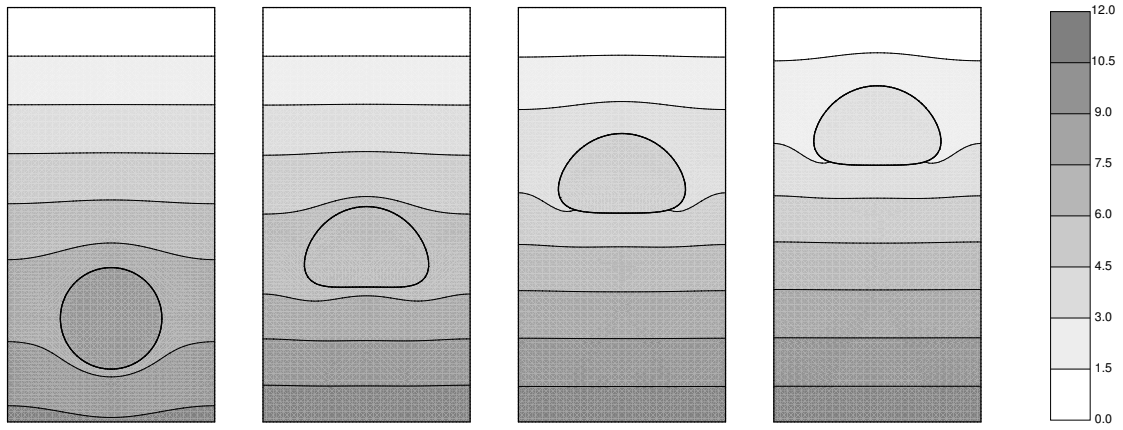


(a) $t = 0.0s$

(b) $t = 5.5s$

(c) $t = 11.1s$

(d) $t = 14.8s$

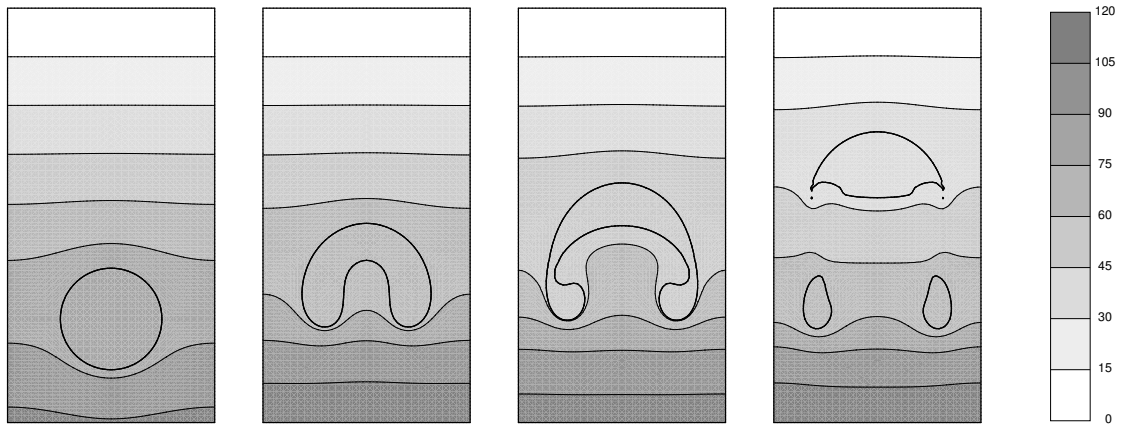


(f) $t = 0.0s$

(g) $t = 4.2s$

(h) $t = 8.4s$

(i) $t = 11.2s$



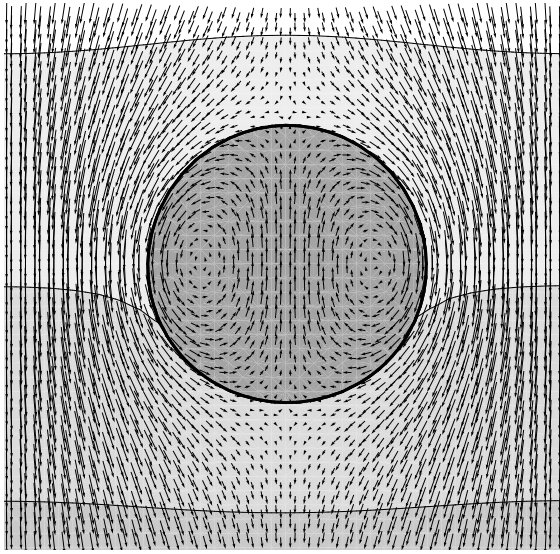
(k) $t = 0.0s$

(l) $t = 9.1s$

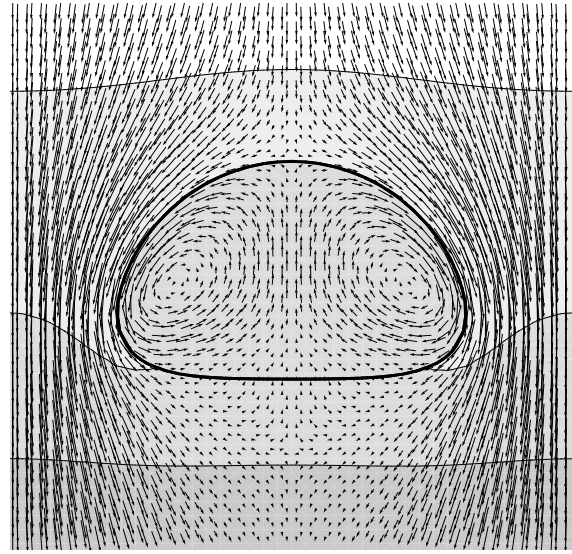
(m) $t = 16.s$

(n) $t = 24.4s$

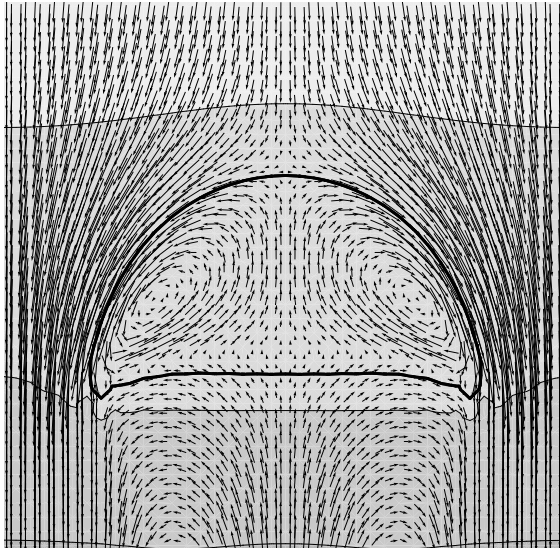
Bild 5.13: Zeitverlauf Blasenform und Druck für $Eo = 10^0$, $Eo = 10^1$ und $Eo = 10^3$.



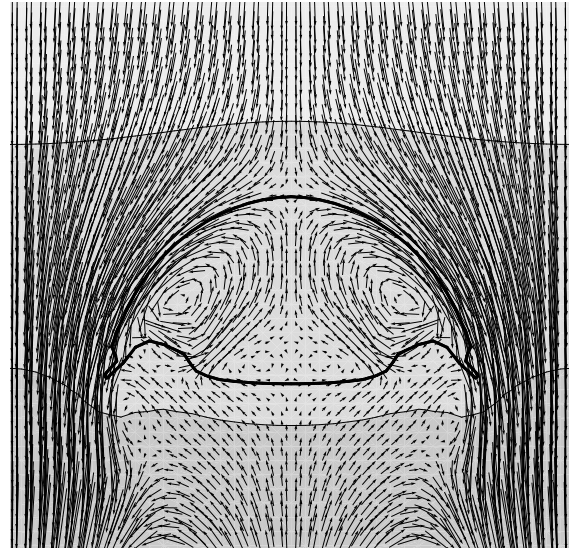
(a) $Eo = 10^0$



(b) $Eo = 10^1$



(c) $Eo = 10^2$



(d) $Eo = 10^3$

Bild 5.14: Blasenformen für unterschiedliche Anfangsdurchmesser.

Bild 5.14 zeigt die Blasenformen und zugehörigen Druck- und Relativgeschwindigkeitsfelder bei Erreichen des oberen Behälterdrittels. Die aus der numerischen Simulation gewonnenen Blasenformen stimmen mit den Resultaten aus Experimenten [26] qualitativ gut überein. In Bild 5.14(a) befindet sich die Blase im sphärischen Regime mit deutlich ausgebildeter innerer Zirkulation. Den Übergangsbereich des elliptischen Regimes bildet die in Bild 5.14(b) abgebildete Konfiguration. Ein sehr großer Blasendurchmesser in Bild 5.14(c) und Bild 5.14(d) ist mit nur geringen Kapillarkräften verknüpft, die die Kugelform beim Aufsteigen der Blase nicht stabilisieren können, so daß eine

Verformung der Blase als gekräuselte Kugelkappe mit ausgeprägter Wirbelschleppe im Nachlaufbereich die Folge ist.

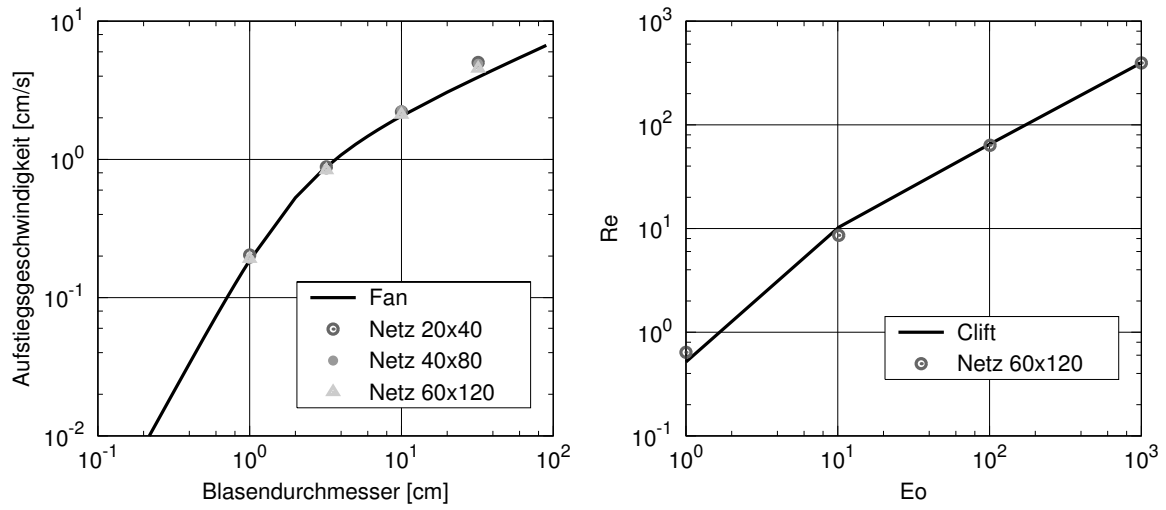


Bild 5.15: Blasenauftstiegsgeschwindigkeit und Reynolds-Zahl.

Fan [31] verknüpft die Bewegungsformen der Blasen und gewinnt eine Vorschrift zur Ermittlung der Aufstiegsgeschwindigkeit von Gasblasen in allen Regimen. Für die betrachteten Konfigurationen sind in Bild 5.15 die Blasenauftstiegsgeschwindigkeiten der numerischen Simulation für drei unterschiedlich feine Diskretisierungen den Werten nach Fan gegenübergestellt. Die über die Eötvös-Zahl aufgetragenen Reynolds-Zahlen der aufsteigenden Gasblasen zeigen sehr gute Übereinstimmung mit experimentell von Clift [26] gewonnen Vergleichswerten. Weitergehende Untersuchungen zum Aufstiegsverhalten ganzer Blasenschwärme veröffentlicht zum Beispiel Schlüter [83].

6. Zwei-Fluid-Struktur-Interaktion

In Natur und Ingenieurwesen existiert eine Fülle dynamischer Vorgänge, bei denen elastische Strukturen in schwacher oder starker Wechselwirkung mit umgebenden reibungsbehafteten Zwei-Fluid-Strömungen oder Strömungen mit freier Oberfläche stehen. Von der Seite des Ingenieurs besteht das dringende Interesse an der Untersuchung der auftretenden Interaktionsphänomene im Bereich des Wasserbaus und der Siedlungswasserwirtschaft, ebenso bei Wellenschlag auf Offshore-Strukturen oder Schiffaufbauten (Bild 6.1). Aufgaben der Verfahrenstechnik haben unter anderem die Optimierung industrieller Abläufe zum Ziel, bei denen mehrphasige Strömungen kleiner Längenskalen mit elastischen Bauteilen interagieren und darüberhinaus mit chemischen und thermodynamischen Prozessen gekoppelt sind. Das Verständnis der auftretenden Wechselwirkungsprozesse unterstützt die Entwicklung langlebiger, effizienter – und dabei sicherer – Ingenieurkonstruktionen. So steht bei Anlagen, die Extrembelastungen ausgesetzt sind, gerade der Sicherheitsaspekt und die Eindämmung einer möglichen Schadenswirkung im Mittelpunkt des öffentlichen Interesses. Für die meisten der genannten Vorgänge kann keine Vorhersage des Systemverhaltens anhand bekannter geschlossener Lösungen gegeben werden. Es besteht daher ein Bedarf an leistungsfähigen Modellen und Methoden zur numerischen Simulation von Wechselwirkungsvorgängen zwischen Zwei-Fluid-Strömungen und verformbaren Festkörpern.

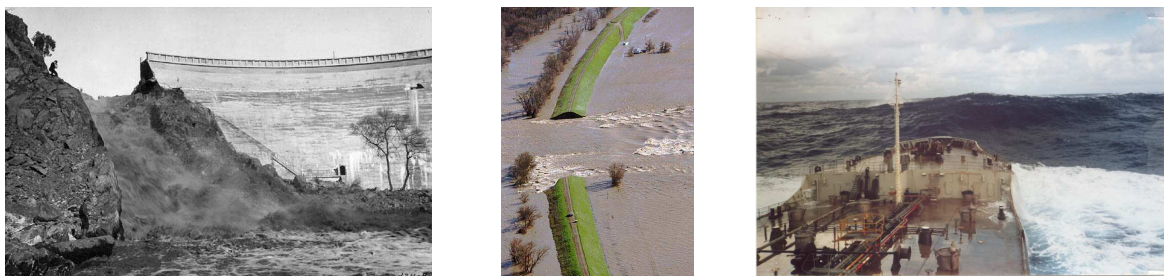


Bild 6.1: Versagen von Staubauwerken und Deichanlagen, Wellenschlag auf Schiffe.

Wie bei den in Kapitel 5 und Kapitel 4 besprochenen Zwei-Fluid-Strömungen bzw. bi-materiellen elastischen Festkörpern findet in randgekoppelten Fluid-Struktur-Systemen der Austausch von Informationen an einer gemeinsamen Grenzfläche statt. Charakteristisch ist die durch Starrkörperbewegungen und Deformationen der Struktur her-

vorgerufene zeitabhängige Lage des Kopplungsrandes, auf dem Strömung und Festkörper wechselwirken. Im Gegensatz dazu findet die Interaktion volumengekoppelter Aufgaben, wie z.B. formveränderliche poröse Medien, im gesamten Gebiet zwischen verschiedenen physikalischen Größen statt.

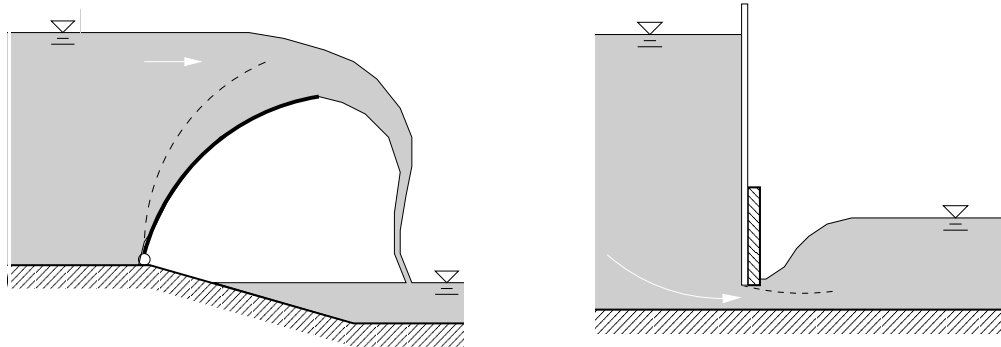


Bild 6.2: Schwingungsanregung bei Wehrbauwerken.

Ausgewählte randgekoppelte Aufgaben aus dem Bereich der Hydroelastik sind in Bild 6.2 aufgeführt. Während im Beispiel des unterströmten Schotts keine Rückwirkung der Struktur auf das Fluidgebiet stattfindet, kann das System des überströmtes nachgiebigen Wehrbauwerks zu Schwingungen angeregt werden. Die Form und das Verhalten des erzeugten Freistrahls sind von einer Vielzahl Faktoren wie Fallhöhe, Strömungsgeschwindigkeit und Richtung abhängig. Eine ausreichende Beschreibung des zu Oszillationen neigenden freien Überfalls ist nur durch das Einbeziehen der umgebenden Luftströmung gewährleistet, wie experimentelle Untersuchungen belegen [67]. Ursachen für die Instabilität des Überfallstrahls sind Wechselwirkungen mit der eingeschlossenen Luftströmung, instationäre Zuflussbedingungen oder auf den Strahl rückwirkende Effekte bei seinem Eintritt in das Wasserpelster des Unterwassers. Aus diesem Grunde ist die Dynamik beider Phasen – Wasser und Luft – zur Modellbildung der Strömung heranzuziehen.

6.1 Modellbildung

Das zu untersuchende Zweifluid-Struktur-System ist als Mehrfeldaufgabe randgekoppelter Kontinua modelliert. Das Gebiet der Strömung Q_F besteht aus zwei unmischbaren Fluiden, deren gemeinsame Kopplungsfläche der Dynamik der reibungsbehafteten und inkompressiblen Strömung unterworfen ist. Das in Abschnitt 5.1 eingeführte Modell einer Zwei-Fluid-Strömung gilt für im Bauwesen vorherrschenden Strömungen niedriger Machzahl und kommt hier für das Strömungsgebiet zum Einsatz. Am Fluid-Fluid-Interface R auftretende Oberflächenspannungseffekte sind somit ebenfalls

berücksichtigt. Die in Abschnitt 4.1 untersuchte und als linear elastisch angenommene Struktur in Q_S mit nichtlinearer Kinematik besitzt mit der Strömung eine gemeinsame Grenzfläche – das Fluid-Struktur-Interface $K = \Theta \times I$ mit

$$K = Q_S \cap (Q_{F_1} \cup Q_{F_2}) \quad (6.1)$$

und dem momentanen Raum-Zeit-Gebiet des Festkörpers Q_S und den Strömungskontinua Q_{F_1} und Q_{F_2} . Die Grenzflächen R und K sind zeitveränderlich. Bild 6.3 verdeutlicht die nicht überlappenden Teilgebiete und Grenzflächen des Modells.

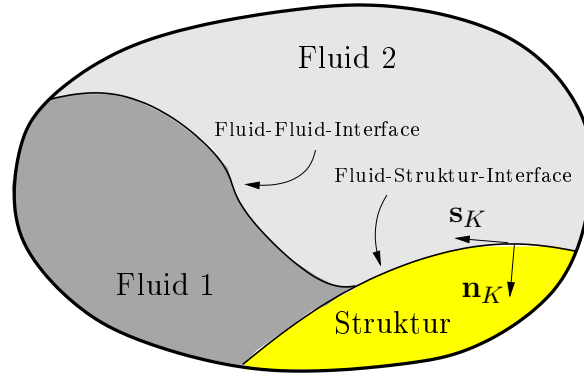


Bild 6.3: Fluid-Struktur-Interaktion – randgekoppelte Fluide und Festkörper.

Am Fluid-Struktur-Interface sind auf Grundlage von Masse- und Impulsbilanz Übergangsbedingungen zu formulieren. Die Skalen der physikalischen Größen der im folgenden untersuchten Fluid-Struktur-Systeme erlauben die Modellannahme von Gleitrandbedingungen am Kopplungsrand. Im Bereich der Hydroelastik überwiegen Schwerkräfte den Kräften aus viskoser Reibung der Strömung. Bei Fluiden geringer Viskosität und Präsenz eines dominanten Erdschwerefeldes ist der Einfluß der Grenzschicht infolge am Festkörper haftender Fluidpartikel sowie der tangentialen Impulsübertrag vernachlässigbar. In der Folge sind die Tangentialkomponenten von Geschwindigkeit und Randspannung auf der Fluid- und Strukturseite entkoppelt.

Für die impermeable Grenzfläche resultiert die geometrische Kopplungsbedingung

$$(\mathbf{v}_F^a - \mathbf{v}_S^a) \cdot \mathbf{n}_K^x = 0 \quad (6.2)$$

identischer Geschwindigkeitskomponenten in Richtung der Normalen \mathbf{n}_K^x des Fluid-Struktur-Interfaces in der Momentankonfiguration. Der Vektor \mathbf{n}_K ist als Randnormale des Fluidgebietes definiert und zeigt in das Festkörpergebiet. Das Gleichgewicht der Randnormalspannungen von Fluid und Festkörper an der Kopplungsfläche

$$(\mathbf{t}_F^x + \mathbf{t}_S^x) \cdot \mathbf{n}_K^x = 0 \quad (6.3)$$

fordert die dynamische Übergangsbedingung. Die Berücksichtigung von Reibungseinflüssen gelingt mit der Formulierung geeigneter Gleichgewichtsbedingungen für die tangentialen Anteile der Randspannungen, ist in dieser Arbeit jedoch nicht Gegenstand der Betrachtung.

Bei der Auswertung der Kopplungsbedingungen sind die unterschiedlichen Betrachtungsweisen von Strömungs- und Festkörperkontinuum von Bedeutung. Die Beschreibung der Struktur erfolgt zweckmäßig mit der massepunktbezogenen Betrachtung nach Lagrange, während die Größen des Fluidkontinuums nach Euler ortsfest erfasst sind. Die vorgestellten Formulierungen für Festkörper und Strömung verwenden Geschwindigkeiten als unbekannte Beschreibungsgrößen und vereinfachen so die Realisierung der Kopplungsbedingungen (6.2) und (6.3).

6.1.1 Kopplung von Fluid und Struktur

Zur Integralformulierung der Modellgleichungen für Fluid (5.10) und Struktur (4.1) tritt die Variationsform der Kopplungsbedingungen (6.2) und (6.3) in der Raum-Zeit-Scheibe n

$$+ \int_{K^x} \delta t_F (\mathbf{v}_F - \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{n}_K \, dK^x - \int_{K^x} \delta (\mathbf{v}_F \cdot \mathbf{n}_K) t_F \, dK^x + \int_{K^x} \delta (\mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n}_K) t_F \, dK^x \quad (6.4)$$

hinzu, die die Zwangsgröße t_F als Interface-Normalspannung und zusätzliche Beschreibungsgröße verwendet. Die hochgestellten Indizes zur Kennzeichnung der Materialkonfiguration als Bezugskonfiguration der Spannungsgröße und der materiellen Geschwindigkeit entfallen im Sinne besserer Lesbarkeit.

Die betrachteten Festkörper unterliegen nur moderatem Gestaltwechsel und topologische Formänderungen können ausgeschlossen werden. Die Kontinua des Zwei-Fluid-Gebietes weisen dagegen in der Regel starke Deformationen und Gestaltänderungen auf. Die Fluid-Fluid-Grenzfläche ist daher zweckmäßig mit einer impliziten Methode auf dem Eulerschen Berechnungsnetz des Strömungsgebietes zu beschreiben – der in Abschnitt 2.2 vorgestellten und in Kapitel 5 auf Zwei-Fluid-Systeme angewendeten Level-Set-Methode. Dazu gegensätzlich ist die Fluid-Struktur-Grenzfläche explizit erfasst, d.h. die Diskretisierung des Strömungsgebietes ist auf dem Kopplungsrand an der Strukturdiskretisierung orientiert. Die Knoten beider Raum-Zeit-Berechnungsnetze fallen auf dem Kopplungsrand K von Strömung und Festkörper zusammen und vereinfachen die Diskretisierung von Gleichung (6.4). Bild 6.4 verdeutlicht die unterschiedlichen Frontbeschreibungstypen des in diesem Kapitel vorgestellten Schemas zur Untersuchung der Wechselwirkung von elastischer Struktur und Zwei-Fluid-Strömung.

Jede Bewegung des in der Materialkonfiguration beschriebenen Strukturrandes bewirkt eine Änderung des Fluidrandes und des Fluidgebietes in der Momentankonfigu-

ration. Während die Diskretisierung des Festkörpergebietes unverändert bleibt, folgt das Fluidgebiet der Strukturdeformation. Unter der Voraussetzung moderater Verformungen und Starrkörperbewegungen sind aufgrund unveränderter Topologie des Berechnungsgitters Netzbewegungsverfahren, wie der von Walhorn [106] beschriebene Pseudo-Struktur-Ansatz, geeignet und kommen in den folgenden Beispielen zum Einsatz. Die Diskretisierung des Fluidgebietes mit raum-zeit-finiten Elementen erlaubt die Anpassung der Geometrie des Raum-Zeit-Netzes an den zeitveränderlichen Kopplungsrand. Die Integration der Modellgleichungen auf dem mit finiten Raum-Zeit-Elementen diskretisierten veränderlichen Raum-Zeit-Gebiet gewährleistet die Erhaltung der Konservativitätseigenschaften des Diskretisierungsverfahrens, da a priori die Erfüllung des Raumerhaltungsgesetzes (geometric conservation law) sichergestellt ist.

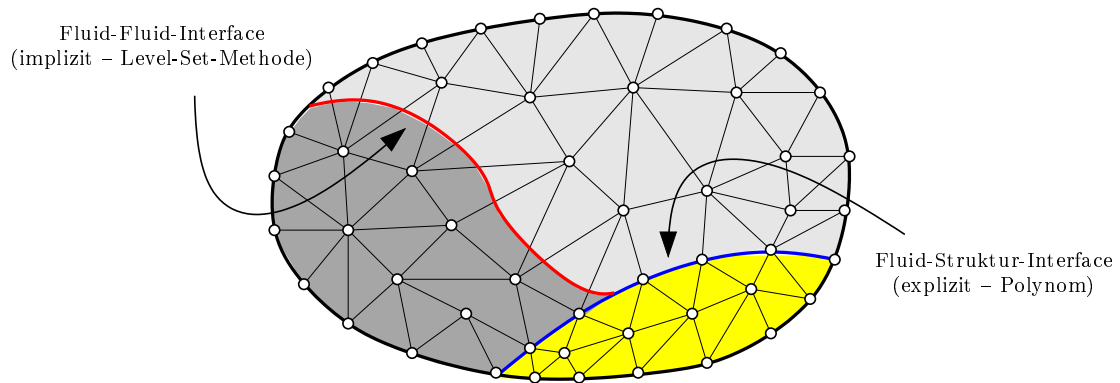


Bild 6.4: Erfassung der Grenzflächen im gekoppelten Fluid-Struktur-System.

Die diskretisierten Bestimmungsgleichungen für Zwei-Fluid-Strömung, Struktur und die auf dem expliziten Fluid-Struktur- sowie dem impliziten Fluid-Fluid-Interface formulierten diskreten Übergangsbedingungen führen auf ein gekoppeltes nichtlineares Gesamtgleichungssystem. Die den bewegten Fluid-Fluid-Kopplungsrand erfassende diskrete Level-Set-Gleichung ist innerhalb des Picardschen Iterationsschemas für nichtlineare Aufgaben formal von den Physik-Gleichungen entkoppelt.

Das resultierende System algebraischer Gleichungen illustriert Bild 6.5, das nur die Geschwindigkeitsfreiwerte der Zwei-Fluid-Strömung $\hat{\mathbf{v}}_{F_1}$ und $\hat{\mathbf{v}}_{F_2}$ und des Festkörpers $\hat{\mathbf{v}}_S$, sowie die zur Realisierung der Kopplungsbedingungen eingeführten Lagrange-Multiplikatoren darstellt. Die implizite Zwangsgröße $\tilde{\mathbf{t}}$ koppelt die Strömungsgebiete auf dem Fluid-Fluid-Rand über die Geschwindigkeiten auf dem Interface. Der Hauptdiagonaleintrag ist aufgrund der in Abschnitt 3.3.1 vorgeschlagenen Stabilisierung des Lagrange-Multiplikators von Null verschieden, im Vergleich zu den verbleibenden Zeileneinträgen jedoch sehr klein. Der den Interfacegeschwindigkeiten $\hat{\mathbf{v}}_{F_1}$ zugeordnete Eintrag auf der rechten Seite berücksichtigt den Einfluß der Oberflächenspannung. Gleitreibungsbedingungen auf dem Fluid-Struktur-Rand sichern die Interface-

Normalspannung $\hat{\mathbf{t}}_F$, die die Identität der Normalkomponente der Geschwindigkeiten am Fluid-Struktur-Rand gewährleistet. Die Kopplungsformulierung des Strömungs-Struktur-Interfaces entspricht einem klassischen Lagrange-Multiplikator-Verfahren mit unbelegter Hauptdiagonale der Zwangsgrößeneinträge.

$$\begin{bmatrix}
 \hat{\mathbf{K}}_{F_1} & & & & & \\
 & -\hat{\mathbf{B}}_1 & & & & \\
 & \hat{\mathbf{B}}_1^T & & -\hat{\mathbf{B}}_2^T & & \\
 & & \hat{\mathbf{B}}_2 & & & \\
 & & & \hat{\mathbf{K}}_{F_2} & & \\
 & & & & -\hat{\mathbf{B}}_F & \\
 & & & & \hat{\mathbf{B}}_F^T & -\hat{\mathbf{B}}_S^T \\
 & & & & & \hat{\mathbf{B}}_S \\
 & & & & & & \hat{\mathbf{K}}_S
 \end{bmatrix}
 \times
 \begin{bmatrix}
 \hat{\mathbf{v}}_{F_1} \\
 \tilde{\mathbf{t}} \\
 \hat{\mathbf{v}}_{F_2} \\
 \hat{\mathbf{t}}_F \\
 \hat{\mathbf{v}}_S
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \hat{\mathbf{b}}_{F_1} \\
 \mathbf{0} \\
 \hat{\mathbf{b}}_{F_2} + \hat{p}_\sigma \\
 \hat{\mathbf{b}}_{F_2} \\
 \mathbf{0} \\
 \hat{\mathbf{b}}_S
 \end{bmatrix}$$

Bild 6.5: Gesamtgleichungssystem.

In dieser Form realisiert das Verfahren die starke Kopplung der diskretisierten Modellgleichungen für die beteiligten randgekoppelten Kontinua über die linke Seite des Gesamtgleichungssystems [57]. Einen Überblick starker und schwacher Lösungsalgorithmen in der numerischen Fluid-Struktur-Analyse geben Steindorf [92] und Mok [65, 66]. Die detaillierte Beschreibung des verwendeten Picard-Iterationsschemas für nichtlineare Gleichungen, sowie Aussagen über geeignete Strategien zur numerischen Lösung der resultierenden linearen Gleichungssysteme mit direkten und iterativen Verfahren liefern die Arbeiten von Hübner [45] und Walhorn [106].

6.2 Wasserwelle in fremderregtem Behälter

Das System zur Untersuchung der Wellenbewegung in einem fixierten Behälter der Tiefe $t = 1$ cm aus Abschnitt 5.3 wird so modifiziert, daß mit der in Bild 6.6 gezeigten Lagerung horizontale Verschiebungen der Behälterstruktur möglich sind. Der Behälter mit sehr hoher Steifigkeit ist als Starrkörper der Masse $m_B = 200$ g modelliert. Der Verschiebungszustand der Struktur ist von einer Horizontalfeder der Steifigkeit $k = 10205$ g/s² beeinflusst. Der Behälter ist bis zur Höhe $d = L$ mit einem Fluid der in Abschnitt 5.3 angegebenen Dichte und Viskosität befüllt. Das zweite luftähnliche Fluid belegt den Raum bis zum oberen Behälterabschluß. Auf die Fluide wirkt die Beschleunigung $g = 100$ cm/s².

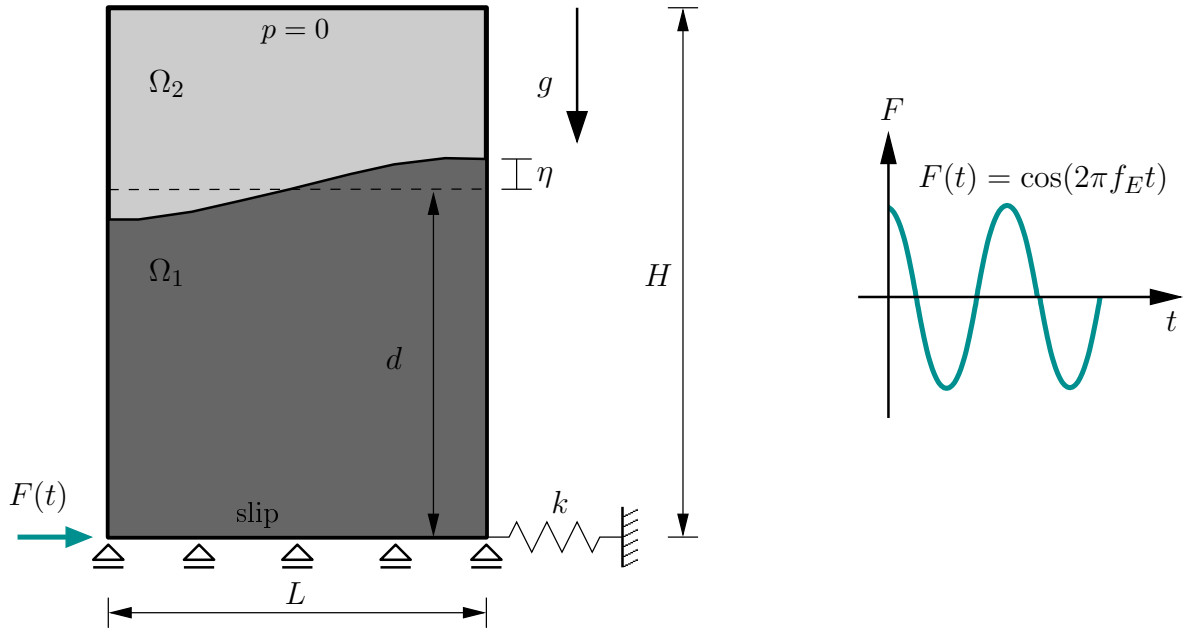


Bild 6.6: Seitlich federnd gelagerter und wasserbefüllter Behälter.

Das Behältersystem kann als Feder-Masse-System aufgefaßt werden, wenn jede Bewegung der Fluide relativ zum Behälter unterbunden ist. Das resultierende System der Gesamtmasse $m = m_B + m_{F_1} + m_{F_2}$ besitzt die Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 1.0 \frac{1}{s}$ und somit eine Eigenfrequenz von $f_0 = \frac{\omega}{2\pi} = 0.1592 \text{ Hz}$, wobei der Index 0 die idealisierte Konzentration der real verteilten Masse des Systems in einem Massepunkt kennzeichnet. Ist die Bewegung der Fluide nicht behindert, schwingt die Grenzfläche nach anfänglicher sinusförmiger Auslenkung bis sie infolge innerer Reibung der Strömung zur Ruhe kommt. Für den reibungsfreien Grenzfall ist in Abschnitt 5.3 die Frequenz der Wellenbewegung im Behälter mit $f_F = 0.28 \text{ Hz}$ nach linearer Wellentheorie angegeben und mit guter Näherung durch die numerische Analyse bestätigt, die zusätzlich Reibungseffekte berücksichtigt.

Das Angreifen einer zeitveränderlichen Last $F(t)$ am Behälterboden setzt das System einer Fremderregung aus. Der Zeitverlauf der Last ist periodisch und von konstanter Amplitude (siehe Bild 6.6). Die Frequenz f_E der Einwirkung ist variabel und bestimmt den zeitlichen Verlauf der Systemantwort maßgeblich. Fällt die Frequenz der äußeren Anregung mit einer der Eigenfrequenzen des Gesamtsystems zusammen, gewinnt das System ständig Energie, was schließlich zu sehr großen Auslenkungen und zur Resonanzkatastrophe führt. Der Resonanzfall tritt nicht ein, wenn Erreger- und Eigenfrequenzen voneinander abweichen; die Schwingungsamplituden sind dann beschränkt.

Für drei verschiedene Erregerfrequenzen $f_E = (\frac{1}{2}f_0, f_0, 2f_F)$ sind in Bild 6.7 die resultierenden Zeitverläufe der Horizontalverschiebung $u_x(t)$ des Behälters angegeben. Gegenübergestellt sind die Ergebnisse des mit beweglichem Fluid befüllten Behälters

inklusive der Vertikalauslenkung $\eta(t)$ der Grenzfläche an der linken Seitenwand. Die schwarz durchgezogene Linie repräsentiert die Auslenkung des idealisierten dämpfungs-freien Feder-Masse-Systems mit unterbundener Fluidbewegung.

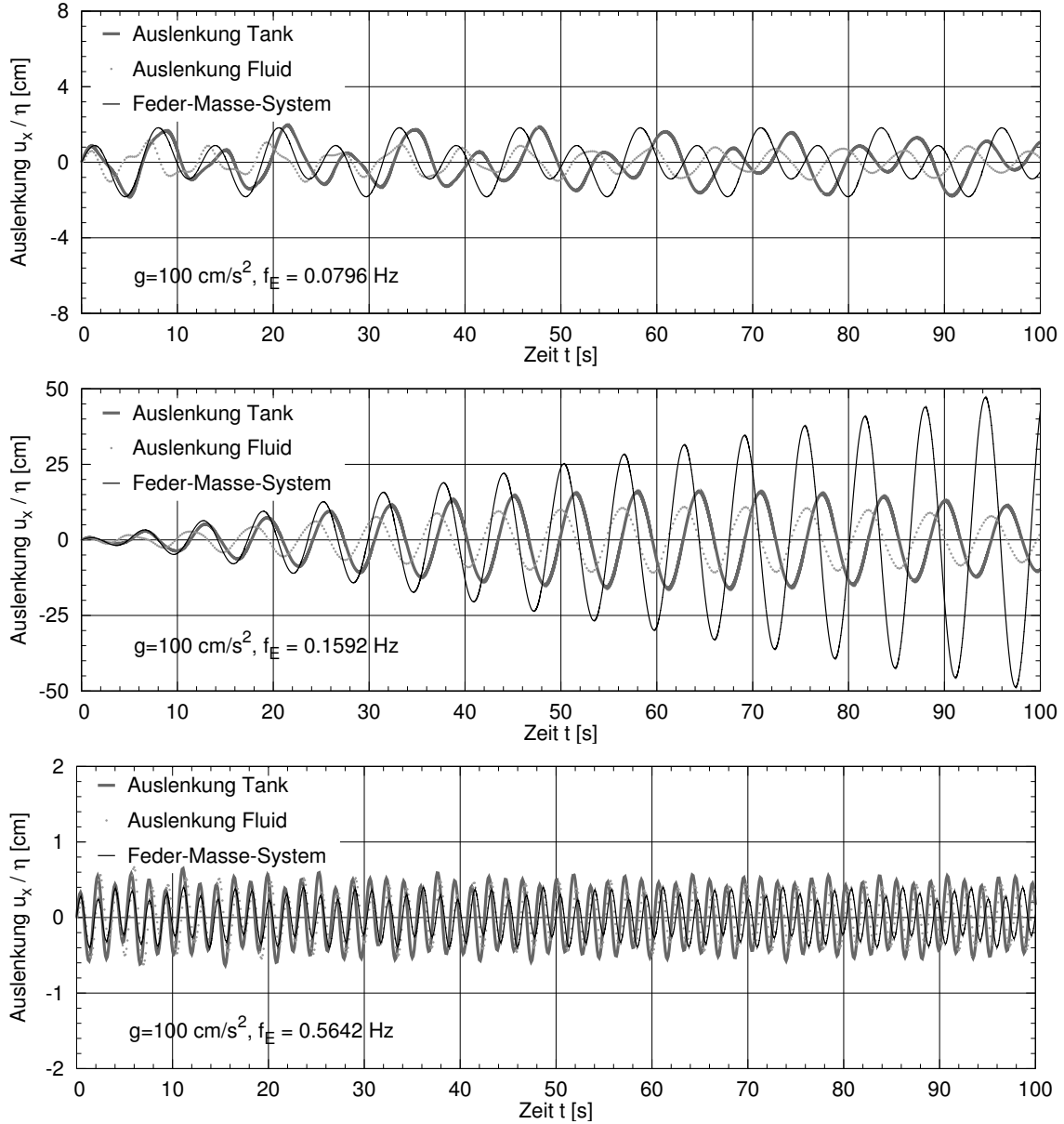


Bild 6.7: Sloshing: Behälterauslenkung und Wellenhöhe (links) für $g = 100 \text{ cm/s}^2$.

Für den Fall $f_E = f_0$ stimmen Erreger- und Eigenfrequenz überein, so daß die Horizontalverschiebung in der Zeit stetig zunimmt. Im Vergleich dazu vollzieht eine unbehinderte Strömung ständige Formänderungen, die infolge seiner Viskosität zu einem Energieaustausch aus dem System führen, da durch Reibung hervorgerufene thermische Prozesse unberücksichtigt bleiben. Das Wellenbewegungen ausführende reibungsbehaftete Fluid wirkt als Dämpfer auf das dynamische Behältersystem. Im Ergebnis wachsen

die Amplituden des gekoppelten Systems nicht über alle Maßen an. Die Auslenkungen bleiben für von der Resonanzfrequenz abweichende Erregerfrequenzen $\frac{1}{2}f_0$ und $2f_F$ erwartungsgemäß moderat und betragen in etwa ein Zehntel der Maximalamplitude des mit $f_E = f_0$ angeregten Behälters mit aktiver innerer Strömung. Die nichtlineare Bewegung des Fluids im Behälter beeinflusst das Verhalten des Gesamtsystems positiv und verhindert im untersuchten Fall die Resonanzkatastrophe.

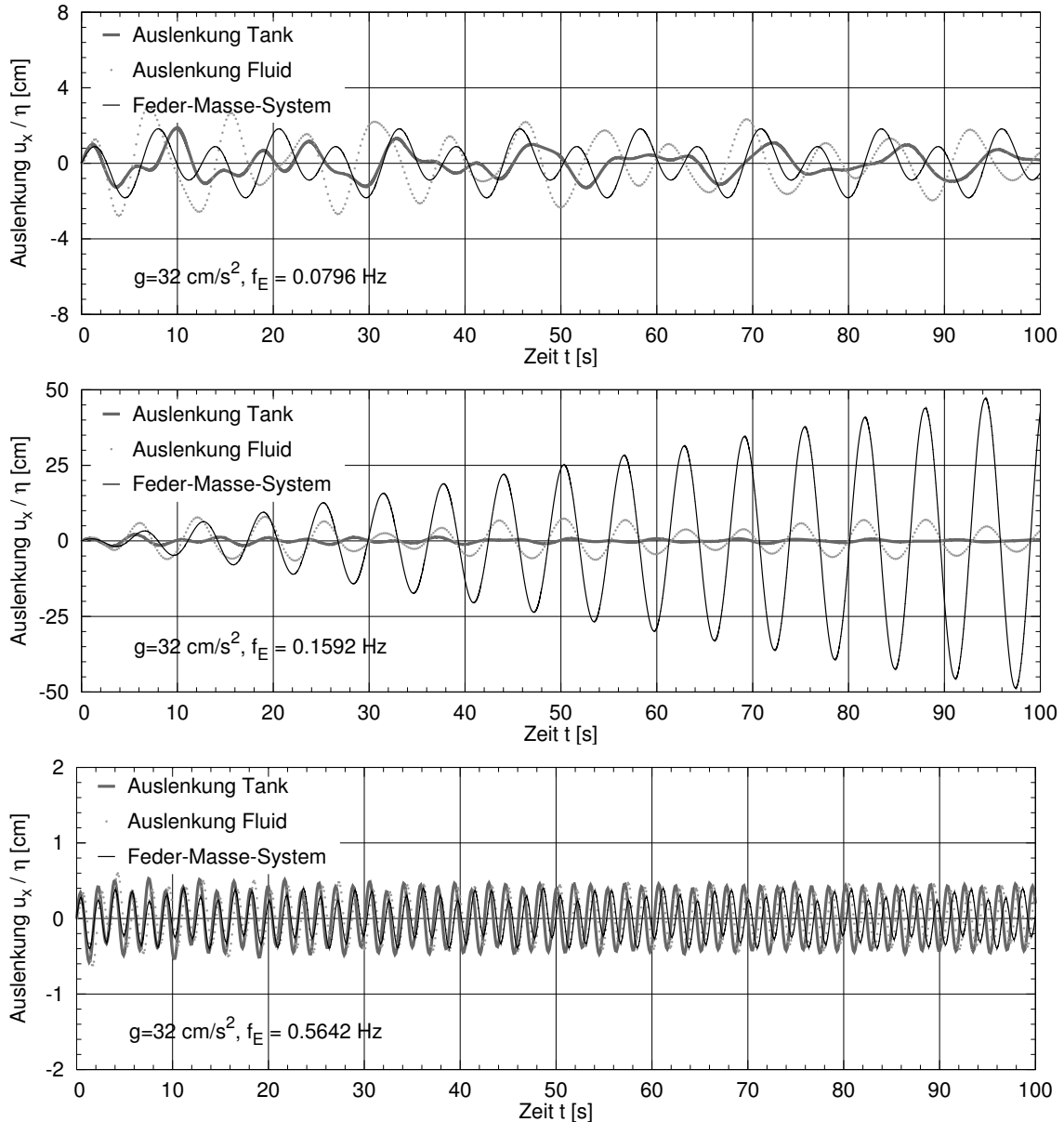


Bild 6.8: Sloshing: Behälterauslenkung und Wellenhöhe (links) für $g = 32 \text{ cm/s}^2$.

Bei der Auslegung von Konstruktionen ist die Begrenzung der auftretenden Verformungen zu sichern. Für das betrachtete Beispiel gelingt die Reduktion der Behälterauslenkung durch Eigenfrequenzänderung der Fluid-Wellenbewegung. Die Wellenfrequenz

f_F ist durch Variation der Beschleunigung g und der Behälterabmessungen L beeinflussbar, wie den in Abschnitt 5.3 angegebenen Beziehungen für Dispersionsrelation, Wellenzahl und Wellenfrequenz zu entnehmen ist.

Um die Systemabmessungen beizubehalten erfolgt die Änderung der Beschleunigung auf $g = 32 \text{ cm/s}^2$, was die Schwerkraftwirkung auf ca. ein Drittel des ursprünglichen Wertes reduziert und in der Folge die Wellenfrequenz der Eigenfrequenz des Feder-Masse-Systems entspricht. Das Fluid zeigt nun ein verändertes Strömungsverhalten unter der äußeren Anregung durch $F(t)$ und die resultierenden Behälterverschiebungen sind deutlich verringert (Bild 6.8).

Das Beispiel zeigt, daß die Fluidfüllung von Tanks geeignet sind, die Schwingungsamplituden des Behälters unter dynamischen Einwirkungen zu beeinflussen, wenn die innere Strukturdämpfung nicht ausreicht, die Bewegungen im notwendigen Maße zu begrenzen. Das erfordert eine geeignete Platzierung und Auslegung solcher Behälter, wobei deren Abmessungen und Füllstand so zu wählen sind, daß sich das gekoppelte System hinsichtlich der auftretenden Verschiebungsgrößen optimal verhält. Eine Einführung und Übersicht zu Theorie und Praxis anpaßbarer Flüssigkeitsdämpfer (tuned liquid dampers) liefern unter vielen anderen Chaiseri et al. [21] und Koh et al. [55].

6.3 Dammbruch auf Hindernis

Im Unterschied zu der in Abschnitt 5.4 untersuchten kollabierenden Wassersäule ist nun am Boden des Behälters ein rechteckförmiges Hindernis angebracht, das die Bewegung des Wassers beeinflusst. Bild 6.9 zeigt das System mit identischen äußeren Abmessungen und Randbedingungen und dem im Abstand $c = 27.7 \text{ cm}$ installierten Hindernis der Höhe $d = 8.0 \text{ cm}$ und der Breite $e = 1.5 \text{ cm}$.

Das Verhalten der Wassersäule wird für zwei Hindernisarten untersucht. Im ersten Fall ist das Hindernis nicht verformbar und wirkt als fester Rand auf die Strömung. Nachfolgend wird das starre Hindernis durch einen elastischen Körper gleicher Geometrie ersetzt, der an seinem Fußende fest mit dem Behälterboden verbunden ist. Die hohe Flexibilität dieses Hindernisses resultiert in maßgeblichen Verformungen, wenn die Wassermasse nach dem Entfernen der Stützwand seitlich auftrifft. Das veränderte Strömungsgebiet wirkt auf das Verhalten des Fluids zurück und führt zu Formänderungen der freien Oberfläche. Die Wechselwirkung von Strömung und Struktur beruht hauptsächlich auf den durch die Erdbeschleunigung hervorgerufenen Schwerkraften. Reibungseffekte treten erst im späteren Versuchsverlauf in den Vordergrund, wenn die Strömungsgeschwindigkeiten stark reduziert sind und in der Folge die freie Oberfläche zur Ruhe kommt. Die auftretenden Schubspannungen an der Strukturoberfläche sind im Vergleich zu den durch den hydrostatischen Druckzustand induzierten Nor-

malspannungen sehr gering und werden bei Annahme von Gleitrandbedingungen am Fluid-Struktur-Kopplungsrand vernachlässigt.

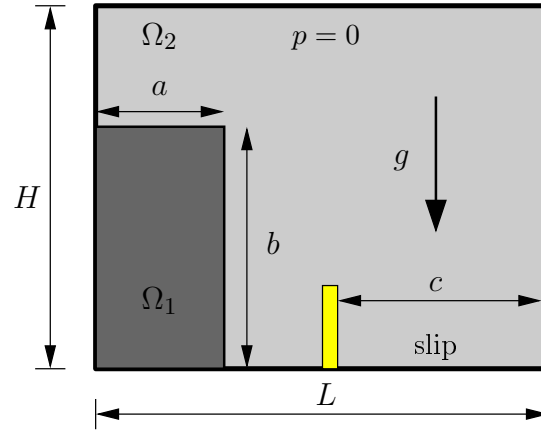


Bild 6.9: System des Behälters mit Hindernis und anfängliche Gebietsverteilung.

Die Dynamik des Systems mit fixiertem Hindernis untersucht Koshizuka [58] mit ähnlichen geometrischen Abmessungen experimentell und numerisch mit einem partikelbasierten Verfahren. Harlow und Amsden [41] verwenden bei ihren Betrachtungen ein Marker-and-Cell-orientiertes Verfahren, bei Sauer [81] kommt ein Finite-Volumen-Ansatz und die Volume-of-Fluid-Methode zum Einsatz.

Die Validierung der Ergebnisse aus der numerischen Berechnung erfolgt anhand experimentell gewonnener Daten über Oberflächenlage und Strukturdeformation. Die Experimente sind für starre und elastische Hindernisse realisiert worden, wobei die Abmessungen des Experimentalsystems denen der Aufgabenstellung entsprechen. Mit der Erdbeschleunigung $g = 981 \text{ cm/s}^2$ und dem charakteristischen Längenmaß $L = 58.4 \text{ cm}$ dominiert zu Prozeßbeginn mit hoher Froude-Zahl $Fr > 1$ die schießende Strömung. Zu untersuchen ist der zeitliche Verlauf der freien Wasseroberfläche und die Verformung des elastischen Hindernisses. Die Dokumentation des Experiments erfolgt visuell und die zeitliche Entwicklung des Systemzustandes liegt als Serie von Einzelbildern mit Zeitabstand $\Delta t_E = 0.04 \text{ s}$ vor. Aus den Einzelbildern sind Lage- und Verschiebungsinformationen mit hinreichender Genauigkeit abgreifbar. Bei der Durchführung der Experimente ist die Anfangssituation Kollapsprozesses schwierig darstellbar. Infolge des mechanischen Reibwiderstandes in der vorgesehenen Führung ist das manuelle Entfernen der Stützplatte nicht plötzlich realisierbar und damit der Anfangszustand von Experiment und Simulation in Grenzen voneinander abweichend. Daher ist der jeweilige Anfangszeitpunkt aufeinander abzustimmen.

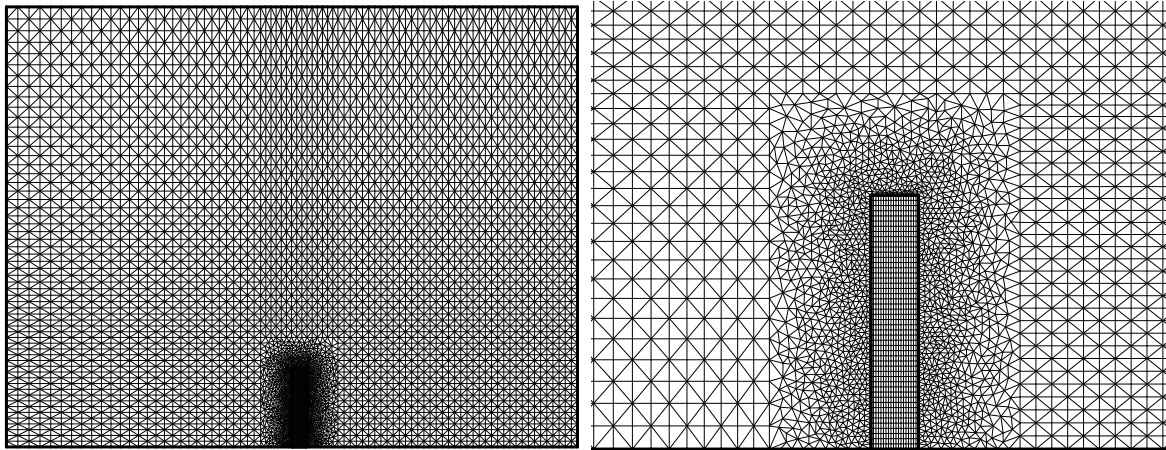


Bild 6.10: Diskretisierung des Behältergebietes und in Hindernisnähe (Netz II).

Die räumliche Diskretisierung des Behältergebietes und des Hindernisses geschieht in drei Auflösungsstufen. Um die sich stark verformende Fluid-Fluid-Grenzfläche abzubilden, ist die Verfeinerung des Berechnungsgitters in Hindernisnähe und in der Umgebung der rechten Seitenwand notwendig. Das Strömungsgebiet ist mit 6-Knoten-Raum-Zeit-Prismen-Elementen diskretisiert, im Hauptteil strukturiert und am Hinderniskörper unstrukturiert. Für das elastische Hindernis werden 8-Knoten-Raum-Zeit-Hexaeder-Elemente von Hübner et al. [46] verwendet. Die im weiteren besprochenen numerischen Ergebnisse sind mit dem in Bild 6.10 dargestellten Berechnungsnetz II mit ca. 10000 Knoten gewonnen. Die Zeitscheibendicke beträgt $\Delta t = 0.001$ s.

6.3.1 Starres Hindernis

Das starre Hindernis behindert die Bewegung des Wassers und ruft ein verändertes Strömungsverhalten im Vergleich zu dem in Abschnitt 5.3 beobachteten hervor. Die Wassersäule sackt zunächst unter ihrem Eigengewicht zusammen und zeigt noch gleiche Verschiebungen von Fuß- und Kopfpunkt der freien Oberfläche. Mit Erreichen des Hindernisses ist die Situation verändert und das Wasser beginnt am senkrechten Hindernis aufzusteigen. Dabei wechselt der Druckzustand innerhalb der Wassermasse maßgeblich und ist an der Hinderniswand deutlich größer als der hydrostatische Zustand. Diese mit Wellenschlag vergleichbare Wirkung nimmt mit dem Übertreten des Wassers über das Hindernis ab, wobei sich eine schmale gekrümmte Wasserzunge ausbildet. Die Krümmung der Wasserzungenspitze nimmt im weiteren Verlauf zu und bewirkt infolge Oberflächenspannung die Bildung und Ablösung von Tropfen. Der übrige Wasserkörper bleibt homogen und die Grenzfläche glatt. Die Wasserzunge erreicht die rechte Behälterwand im oberen Drittel und schließt einen luftgefüllten Raum unterhalb ab. Dieser Raum ist im Experiment aus praktischen Gründen hinterlüftet,

wodurch die vom Wasser gebildete Brücke in sich zusammenfällt und die eingeschlossene Luft mit hoher Geschwindigkeit entweicht. Im Bereich des Hindernisses entsteht dabei eine Sekundärzunge. Der sich anschließende Strömungszustand ist von starker Turbulenz geprägt und führt nach einiger Zeit zu einer Beruhigung der Wasserbewegung.

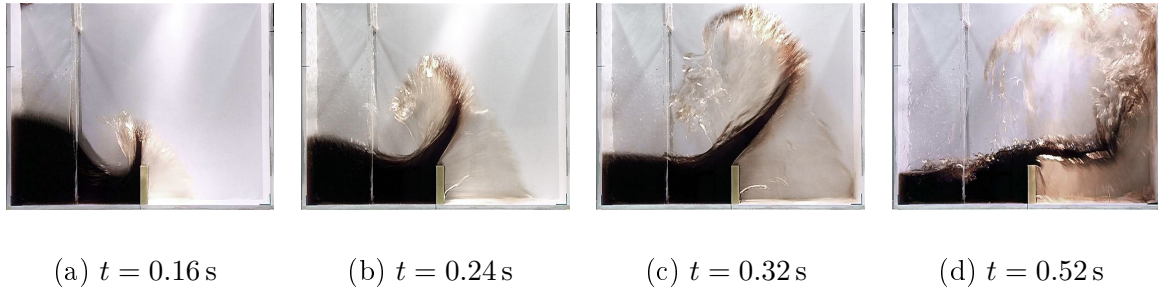


Bild 6.11: Starres Hindernis: Grenzflächenlage im Experiment.

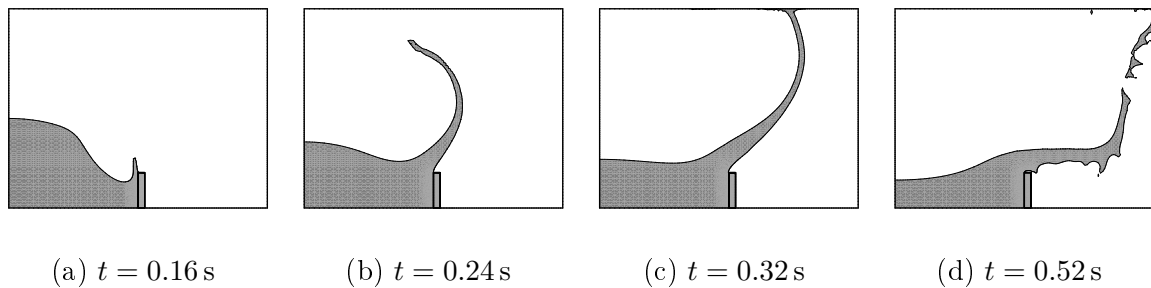


Bild 6.12: Starres Hindernis: Grenzflächenlage in der numerischen Simulation.

Bild 6.11 zeigt die zeitliche Entwicklung der Wasseroberfläche im Experiment. Die zugehörigen numerisch ermittelte Wasserverteilung ist in Bild 6.12 angegeben. Die im Experiment vorhandene Hinterlüftung ist durch eine punktuelle Druckrandbedingung $p = 0$ an der rechten unteren Behälterecke realisiert. Ein Vergleich der experimentellen und numerischen Ergebnisse liefert eine gute Übereinstimmung der Grenzflächenlage, wobei feine Tropfenstrukturen aufgrund der Diskretisierungsbeschränkungen ab einem bestimmten Grad nicht mehr auflösbar sind. Dennoch erfasst das numerische Verfahren die im Experiment beobachteten Sekundärstrukturen qualitativ gut.

In Bild 6.13 sind die Oberflächenpositionen für ausgewählte Zeitpunkte dargestellt. Die Lösungsgüte ist hierbei nur schwer quantitativ zu fassen, so daß der optische Vergleichseindruck Bewertungskriterium ist. Die anfängliche Transformation von Lageenergie in kinetische Energie wird beim Auftreffen auf das Hindernis unterbrochen. Der Wasserkörper erfährt eine Umlenkung. Als Folge erreicht die Bewegungsenergie ihr vorläufiges

Maximum. Anschließend steigt die Wasserzunge auf und kollabiert nach Brückenbildung unter erheblichem Energieaustag durch Reibung. Im Endzustand des zur Ruhe gekommenen Fluids besitzt das System daher eine geringere potentielle Energie als zum Anfangszeitpunkt.

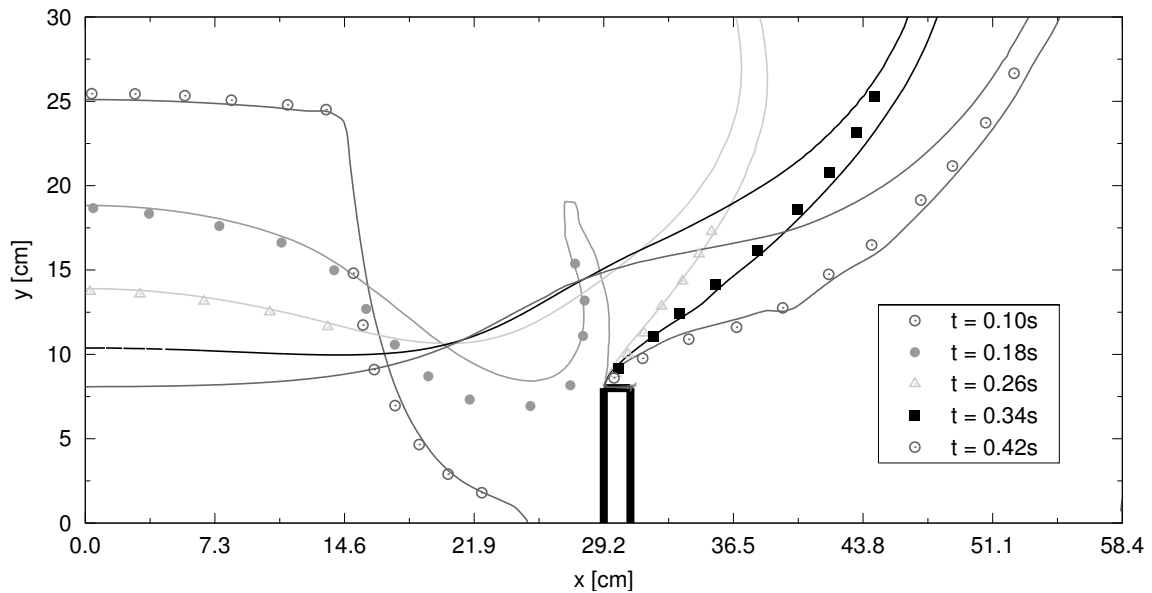
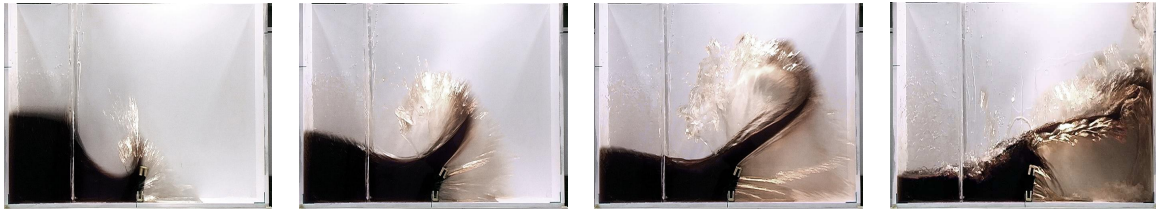


Bild 6.13: Starres Hindernis: Grenzflächenlage in Experiment und Simulation(Linien).

6.3.2 Elastisches Hindernis

Die aus Elastomer bestehende elastische Struktur mit dem Elastizitätsmodul $E = 8 \cdot 10^6 \text{ g/s}^2/\text{cm}$ und der Querdehnzahl $\nu = 0.4$ ruft aufgrund eintretender Verformungen ein abweichendes Systemverhalten hervor, das Bild 6.14 wiedergibt. Die Dichte des Elastomers beträgt $\rho = 0.5 \text{ g/cm}^3$ und das Dämpfungsmaß $d = 4 \cdot 10^2 \text{ g/s}$. Beim Wellenschlag auf das Hindernis das Wasser an der deformierten Struktur auf. Der Aufstiegswinkel der Wasserzunge ist nun geringer als im Versuch mit fixiertem Hindernis, so daß die Zunge an der rechten Behälterwand mittig aufschlägt. Die Strukturdeformation erreicht vor der Brückenbildung ihr Maximum und schwingt im Anschluß auf das durch den hydrostatischen Druck auf der linken Hindernisseite hervorgerufene Verformungsmaß zurück. Die Formen der entstandenen Wasserbrücke und Sekundärstruktur unterscheiden sich von den zuvor beobachteten.

Die numerische Simulation (Bild 6.15) liefert für das gekoppelte System mit verformbarem Hindernis Ergebnisse für die Wasserverteilung im Gebiet, die gut mit den experimentell ermittelten übereinstimmen.



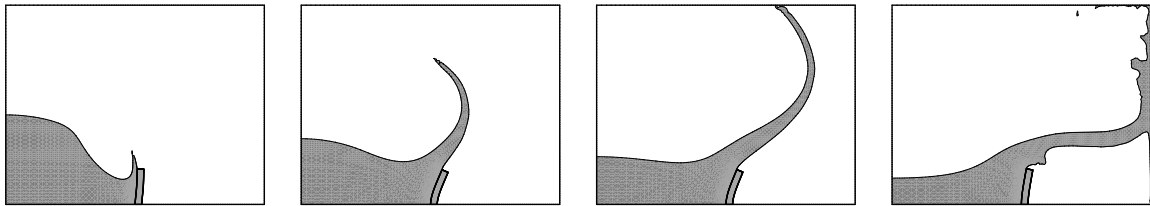
(a) $t = 0.16 \text{ s}$

(b) $t = 0.24 \text{ s}$

(c) $t = 0.32 \text{ s}$

(d) $t = 0.52 \text{ s}$

Bild 6.14: Elastisches Hindernis: Grenzflächenlage im Experiment.



(a) $t = 0.16 \text{ s}$

(b) $t = 0.24 \text{ s}$

(c) $t = 0.32 \text{ s}$

(d) $t = 0.52 \text{ s}$

Bild 6.15: Elastisches Hindernis: Grenzflächenlage in der numerischen Simulation.

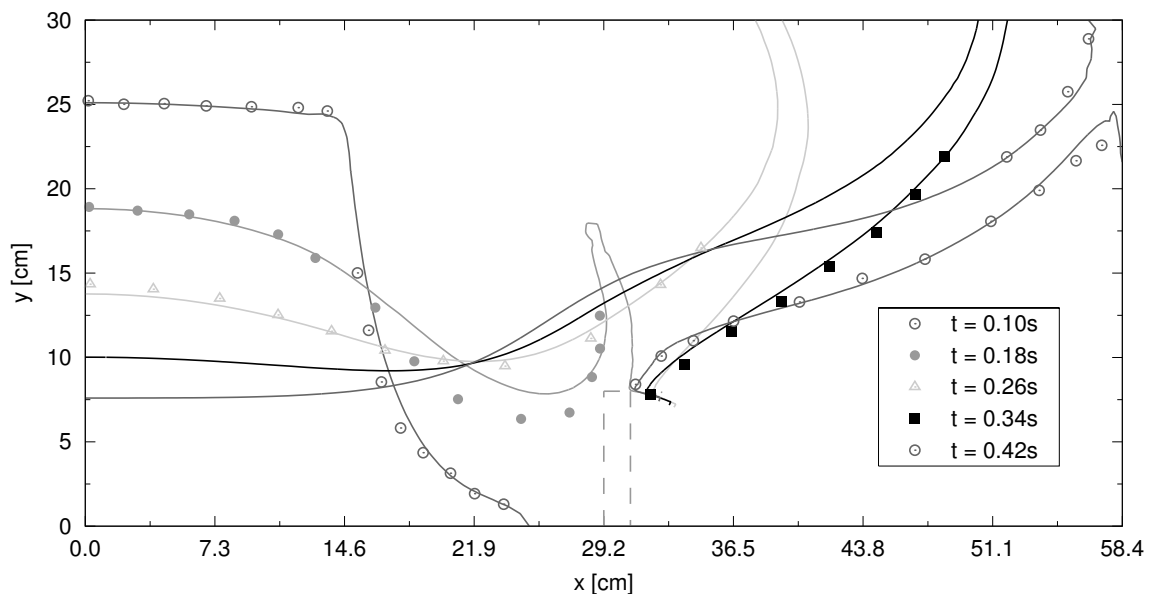
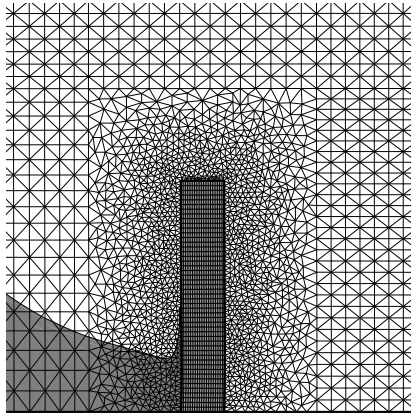


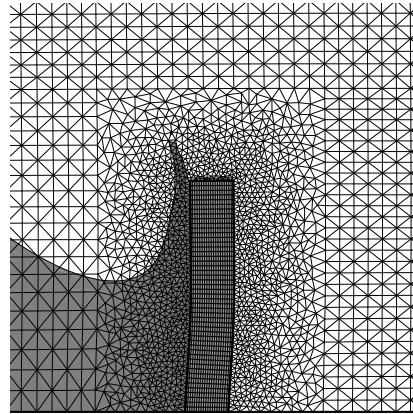
Bild 6.16: Elast. Hindernis: Grenzflächenlage in Experiment und Simulation(Linien).

Die Horizontalauslenkung des linken oberen Eckpunktes der elastischen Struktur ist in Bild 6.18 mit den experimentellen Werten verglichen. Anstieg und Maximalwert der

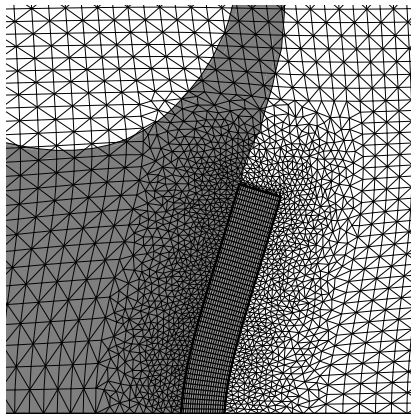
Verschiebung sind in der Berechnung gut wiedergegeben. Eine mögliche Ursache für die im weiteren zeitlichen Verlauf auffälligen Abweichungen ist im nichtlinearen Materialverhalten des gummiähnlichen Festkörpers zu suchen, das mit dem verwendeten linear elastischen Modell nur unzureichend erfasst wird.



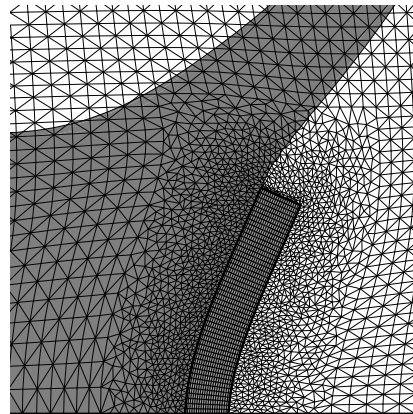
(a) $t = 0.13 \text{ s}$



(b) $t = 0.15 \text{ s}$



(c) $t = 0.20 \text{ s}$



(d) $t = 0.25 \text{ s}$

Bild 6.17: Implizite Fluid-Fluid- und explizite Fluid-Struktur-Grenzfläche.

Der sich verformende Festkörper bewirkt eine zeitliche Änderung des Strömungsgebietes. Bild 6.17 veranschaulicht das mitbewegte Strömungsnetz und zeigt die unterschiedlichen Grenzflächentypen im Detail. Die Fluid-Fluid-Grenzfläche als Null-Isokontur steigt am Hindernis mit dem Fluid-Struktur-Kopplungsrand, der explizit durch die Diskretisierung beschrieben wird, auf.

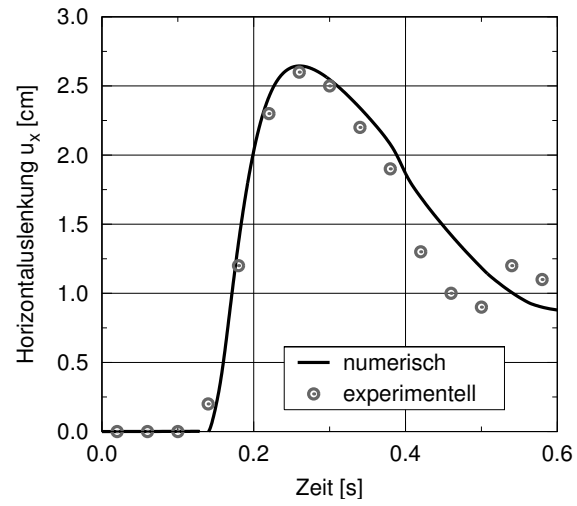


Bild 6.18: Elastisches Hindernis: horizontale Auslenkung des Kopfpunktes der Struktur.

6.4 Gleichgewichtslagen schwimmender Körper

Das numerische Verfahren gestattet neben der Untersuchung gekoppelter Fluid-Festkörper-Systeme mit gelagerten Strukturen die Analyse frei beweglicher Festkörper. Die Anwendungsbereiche des Schiffbaus und Küsteningenieurwesens, sowie die Auslegung von Offshore-Anlagen erschließt sich somit der numerischen Simulation. Die Fähigkeit des Verfahrens, Gleichgewichtslagen schwimmender Körper korrekt darzustellen, ist ein erster Schritt der Verifikation bezüglich oben genannter Aufgabenstellungen.

Der Gleichgewichtszustand frei schwimmender Körper ist mit ihrer Form, Masse und Schwerpunkt bestimmt. Betrachtet wird das in Bild 6.19 dargestellte System eines unendlich langen Prismas mit quadratischem Querschnitt der Seitenlänge $a = 10$ cm, das in einem ebenso geformten Kastenkanal der Breite $L = 50$ cm horizontal gelagert ist. Der Kasten ist bis zur Höhe $\frac{L}{2}$ mit Fluid 1 befüllt, das die Dichte $\rho_1 = 1.0$ g/cm³ und die Viskosität $\mu = 0.1$ g/s/cm besitzt. Darüber befindet sich ein zweites Fluid ($\rho_2 = 10^{-3}$ g/cm³, $\mu = 10^{-3}$ g/s/cm) mit wesentlich geringerer Dichte und Viskosität. Das Verhältnis von Dichte bzw. Viskosität beider Fluide entspricht dem von Wasser und Luft. Auf die Strömung und den als Starrkörper modellierten Schwimmkörper wirkt die konstante Beschleunigung $g = 1000$ cm/s². An den Seiten des Behälters sind Gleitrandbedingungen appliziert und der Druck am oberen offenen Kastenrand ist mit $p = 0$ vorgegeben. Auftretende Oberflächenwellen werden an den Seiten reflektiert und zum schwimmenden Objekt zurückgeworfen, da keine passiven Dämpfungszonen (sponge layers) vorgesehen sind.

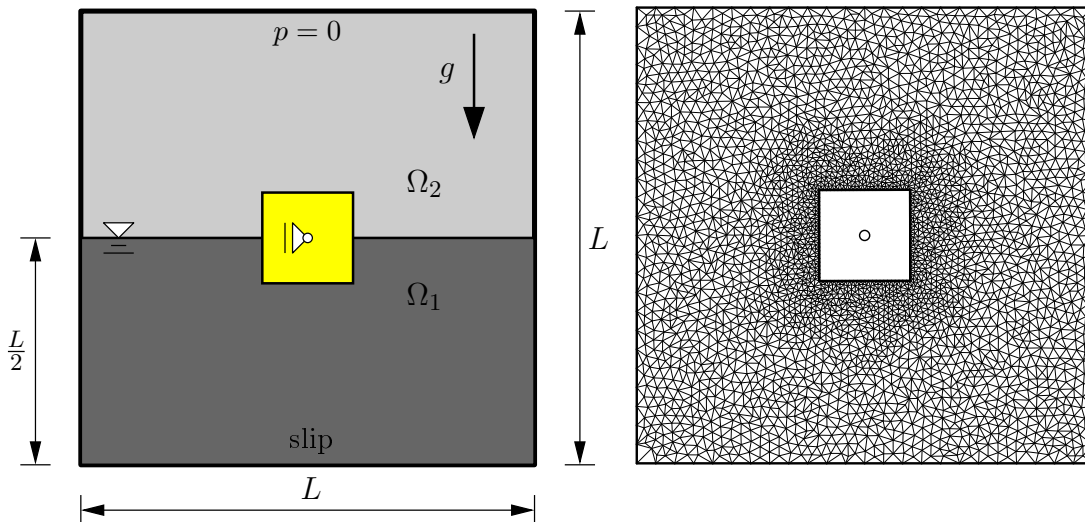


Bild 6.19: System des Behälters mit seitlich gehaltenem schwimmenden Körper.

Der Schwimmkörper befindet sich in Vertikalrichtung im Gleichgewicht, wenn Auftriebskraft und Schwerkraft betragsgleich sind. Hat der Körper die Dichte $\rho_k = 0.50\rho_1$ und ist wie in Bild 6.19 platziert, sind die Vertikalkräfte ausbalanciert. Der Körper besitzt einen Drehfreiheitsgrad. Für die Stabilität der Ausgangslage ist die Sensitivität des Gleichgewichts der Rotationskräfte maßgeblich. Der Massenschwerpunkt S des Schwimmkörpers befindet sich im Zentrum des Quaderquerschnitts, während der Angriffspunkt A der Auftriebskräfte mittig im getauchten Teil des Körpers und genau unterhalb von S liegt. Auftriebs- und Schwerkraftwirkungslinie fallen somit zusammen und bewirken in diesem Zustand kein äußeres Moment, das eine Drehung des Starrkörpers zur Folge hätte, siehe Bild 6.20.

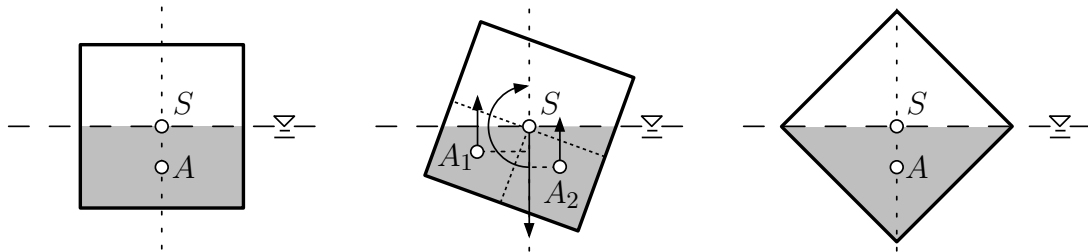


Bild 6.20: Instabiles Gleichgewicht, Störung und stabiles Gleichgewicht nach [32].

Die Ausgangslage ist nicht stabil, da schon eine kleine Störverdrehung um den Masseschwerpunkt die Wirklinien der Resultierenden verschiebt und ein äußeres Moment hervorruft, das die Rotation des Körpers einleitet. Die Drehrichtung ist von der Richtung der Störung anhängig. Der Körper rotiert und findet eine zweite Gleichgewichtslage bei einer Verdrehung von $\pm 45^\circ$ gegenüber der Anfangsposition. In Bild 6.21 ist der aus der mit einer Zeitscheibendicke von $\Delta t = 0.005\text{ s}$ durchgeführten numerischen Simulation gewonnene Zeitverlauf der Verdrehung und Vertikalverschiebung des Masseschwerpunktes S angegeben. Die instabile Ausgangssituation ist durch die Vorgabe einer Anfangsverdrehung des Starrkörpers um 1° gestört. Das eingesetzte Netz besteht aus ca. 3200 Knoten und wird durch die große Starrkörperrotation stark verformt. Auf dem deformierten Netz erfolgt die Auswertung der Fluid-Modellgleichungen und der Level-Set-Gleichung. Die bei der Drehung verursachte Wellenbewegung der freien Oberfläche überlagert das Einstellen der stabilen Gleichgewichtslage. Die Reflexion der Scherwellen an der Behälterwand und dem Schwimmobjekt hat dessen nichtlineare Schwingung um die stabile Gleichgewichtslage zur Folge.

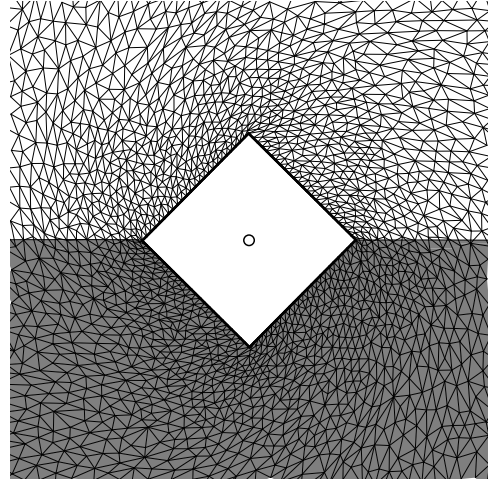
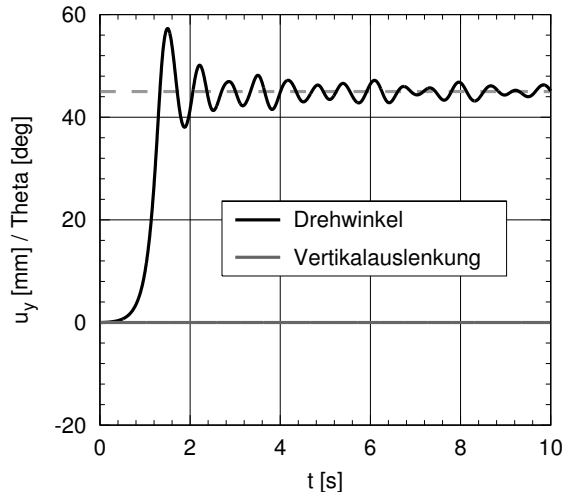


Bild 6.21: $\rho_k = 0.50\rho_1$: Zeitverlauf der Weggrößen des Starrkörpers, verformtes Netz.

Die Endrotation des Schwimmkörpers hängt neben der Geometrie von seiner Dichte ρ_k ab. Besitzt der Körper die Dichte $\rho_k = 0.25\rho_1$ von einem Viertel der Fluid-dichte, bewirken die die Schwerkkräfte überwiegenden Auftriebskräfte das Aufsteigen des Körpers aus der Flüssigkeit bis zum Erreichen der vertikalen Gleichgewichtsposition. Anschließend findet der Körper, beeinflusst durch Einwirkungen beim Aufstieg, nach Verdrehung um $\pm 26.6^\circ$ seine stabile Gleichgewichtslage. Dabei befindet sich ein Eckknoten der Unterseite genau an der Fluid-Fluid-Grenzfläche und der andere unterhalb, so daß ein Viertel des Schwimmkörperquerschnitts getaucht ist. Die Resultate der numerischen Lösung sind in Bild 6.22 angegeben. Die veränderte Dichte des schwimmenden Objekts bewirkt eine Änderung des Systemverhaltens und der Körper schwingt um die neue Gleichgewichtslage bei verschobener Vertikalposition des Schwerpunkts.

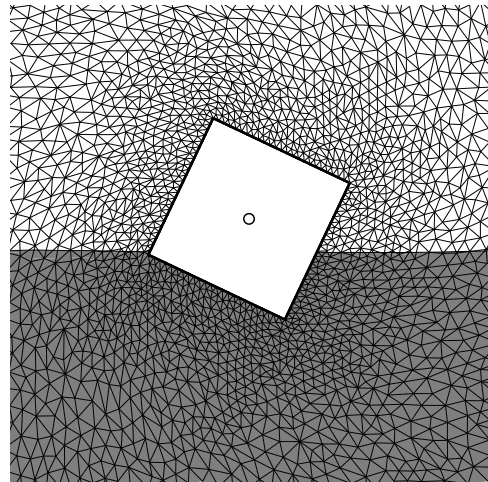
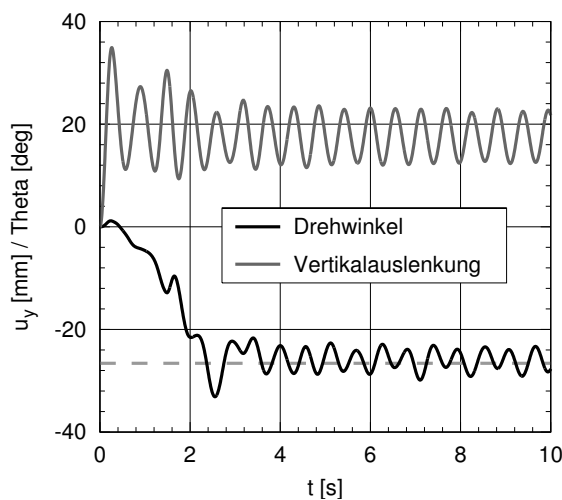
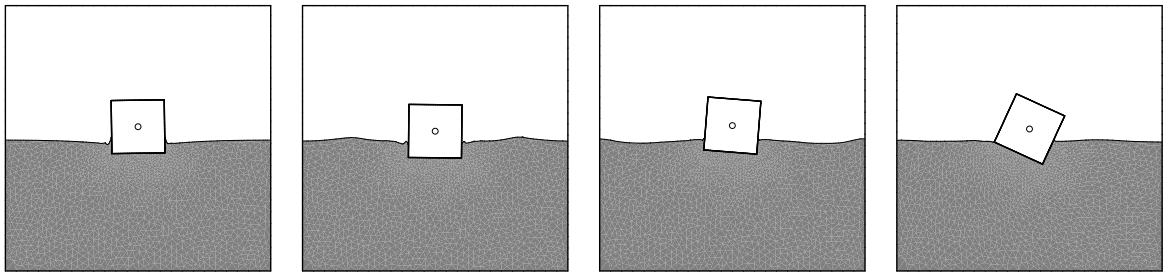


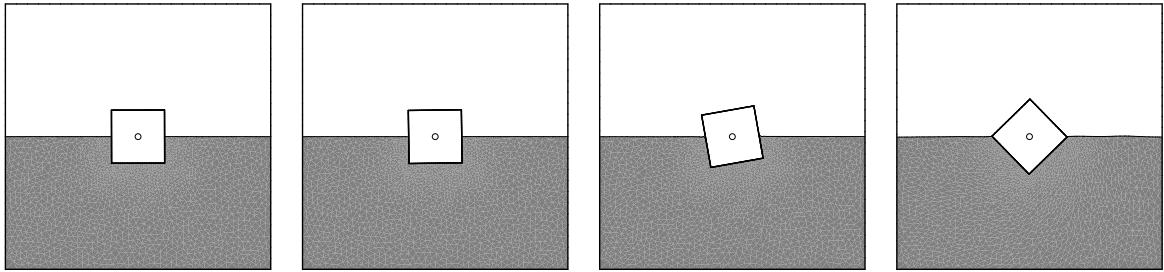
Bild 6.22: $\rho_k = 0.25\rho_1$: Zeitverlauf der Weggrößen des Starrkörpers, verformtes Netz.

Bei den in diesen Konfigurationen auftretenden Starrkörperrotationen ist der Pseudo-Struktur-Ansatz für die Netzbewegung noch in der Lage, das Berechnungsgitter mitzuführen ohne degenerierte Elemente zu erzeugen. Im Fall größerer Verdrehungen ist die regelmäßige Neuvernetzung des Strömungsgebietes notwendig.

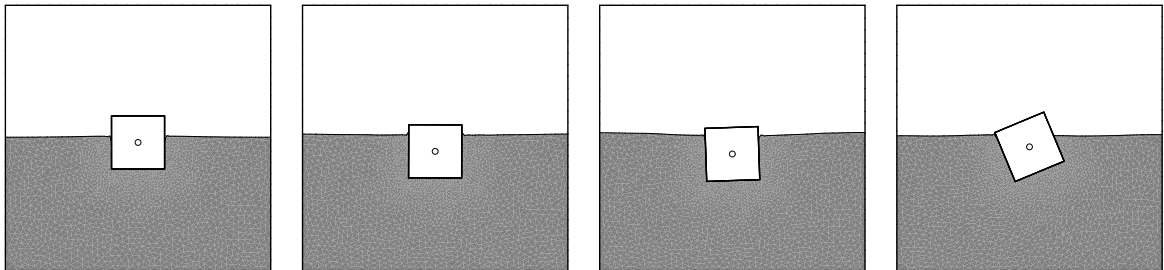
Die Betrachtung einfacher schwimmender Starrkörper zeigt, daß damit verbundene Gleichgewichtslagen und das Verhalten des gekoppelten Fluid-Struktur-Systems bis zum Einstellen des statischen Gleichgewichts plausibel wiedergegeben ist. Weiterführende Untersuchungen zum Schwimm- und Tauchverhalten geometrisch komplexer elastischer Strukturen sind im Bereich des Schiffbaus angesiedelt, die u.a. das Auftreffen von Rettungseinrichtungen auf der Wasseroberfläche analysieren.



(a) $\rho_k = 0.25\rho_1$



(b) $\rho_k = 0.50\rho_1$



(c) $\rho_k = 0.75\rho_1$

Bild 6.23: Position zu den Zeitpunkten $t = 0.15\text{ s}$, $t = 0.5\text{ s}$, $t = 1.0\text{ s}$ und $t = 5.0\text{ s}$.

7. Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit stellt einen Ansatz zur einheitlichen Modellierung und numerischen Lösung randgekoppelter Mehrfeldaufgaben vor. Grundannahme bei der Modellbildung ist die hierfür zweckmäßige Betrachtung aller physikalischen Vorgänge auf der Makroskala. Für die gekoppelten Körper gilt die Kontinuumsannahme. Außerdem gilt die Annahme, daß der Übergang zwischen den Kontinua keine räumliche Ausdehnung besitzt.

Die Bewegung der scharfen Kopplungsfläche unterliegt der Dynamik der beteiligten Körper. Kinematik und Material der Kontinua bestimmen den Grad der Formänderung der Grenzfläche. Unmischbare Mehr-Fluid-Systeme besitzen im Vergleich zu randgekoppelten Festkörpern häufig Interfaces, die im zeitlichen Verlauf starke Gestaltänderungen erfahren. Die Untersuchung von Körpern mit gemeinsamem Kopplungsrand erfordert daher zunächst ein geeignetes Modell zur Erfassung topologisch variierender Grenzflächen. Die implizite Beschreibungsweise des Kopplungsrandes mit Hilfe einer im gesamten Betrachtungsgebiet definierten skalarwertigen Hilfsfunktion wird den oben genannten Anforderungen gerecht. Das Interface entspricht dabei genau der Punktmenge, die durch eine fest vorgeschriebene Niveaufläche des Skalarfeldes definiert ist. Die Einführung der Skalarfunktion als Werte des kleinsten euklidischen Abstandes zum Interface führt auf die Level-Set-Methode, die in dieser Arbeit favorisiert wird. Die zeitliche Lageänderung der Grenzflächenpunkte aufgrund eines Geschwindigkeitszustandes beschreibt die Level-Set-Gleichung, die die Form einer Advektionsgleichung besitzt. Die implizite Erfassung der Grenzfläche ermöglicht die elegante Darstellung komplexer separierender und aggregierender Gebiete und Fronten.

Physikalische Feldgrößen wie Geschwindigkeit, Spannung oder Druck beschreiben den Zustand eines Systems an jedem Punkt des betrachteten Raumes. Aufgrund unterschiedlichen Materialverhaltens oder durch Kontaktflächenphänomene können diese Feldgrößen am Kopplungsrand unstetig verlaufen, so daß der Funktionswert und seine räumlichen Ableitungen aus makroskopischer Sicht Sprünge aufweisen. Die am bewegten Interface diskontinuierlichen Größen sind bei der Entwicklung eines numerischen Lösungsverfahrens zu berücksichtigen, um Konvergenz und Stabilität zu gewährleisten.

Die Diskretisierung der in die Integralform überführten instationären Modellgleichungen für Physik und Grenzflächenentwicklung erfolgt mit finiten Raum-Zeit-Elementen, die das zeitveränderliche Berechnungsgebiet beschreiben, wenn innere Dynamik oder Einwirkungen die Lage des äußeren Gebietsrandes beeinflussen. Das Raum-Zeit-Gebiet ist in finite Elemente unterteilt, die Ansätze für den Verlauf der Zustandsgrößen in räumlicher und zeitlicher Richtung verwenden. Aus Gründen der Effektivität wird auf eine Diskretisierung des gesamten Zeitintervalls als Einheit verzichtet und stattdessen eine Sequenz einzelner Zeitscheiben betrachtet und bearbeitet. Das zeitdiskontinuierliche Galerkin-Verfahren verknüpft die Zustandsgrößen an den Zeitscheibenübergängen in integraler Form und führt mit diskontinuierlichen Ansätzen in der Zeit auf ein Zeitintegrationsverfahren höherer Ordnung. Die Diskretisierung der Level-Set-Gleichung mit raum-zeit-finiten Elementen gewährleistet die Erfassung von Position und Bewegung der Kopplungsfläche zwischen den Kontinua der Mehrfeldaufgabe in Raum und Zeit. Mit Hilfe des Partition-of-Unity-Konzeptes gelingt die Erweiterung des Ansatzraumes der Finite-Element-Approximation, so daß sich diskontinuierliche Verläufe der physikalischen Beschreibungsvariablen am Kopplungsrand einstellen können. Stabilisierte und implizit formulierte Lagrange-Multiplikatoren realisieren von der konkreten Aufgabenstellung abhängige Übergangsbedingungen und somit den Erhalt von Masse und Impuls an der bewegten Grenzfläche. Beispiele belegen, daß die zweckmäßige Anreicherung der Ansatzfunktionen das Konvergenzverhalten des Lösungsverfahrens positiv beeinflusst.

Aus der Diskretisierung der nichtlinearen Modellgleichungen resultiert nach Linearisierung ein gekoppeltes algebraisches Gleichungssystem, das das physikalische Verhalten des Mehrfeldsystems in einer Zeitscheibe beschreibt. Teil des Gesamtsystems ist die diskretisierte Level-Set-Gleichung, in die Informationen über den physikalischen Systemzustand einfließen, der wiederum von der Grenzflächenlage abhängig ist. Die formale Entkopplung der Gleichungssysteme für Physik und Grenzflächenbewegung ist innerhalb des eingesetzten Picard-Iterationsschemas zur Auflösung der nichtlinearen Abhängigkeiten realisiert. Am Ende jeder Picard-Iteration liegt die auskonvergierte Lösung der gekoppelten nichtlinearen Modellgleichungen der aktuellen Zeitscheibe vor.

Die Methodik wird zur Beschreibung der Dynamik ebener Zwei-Fluid-Strömungen eingesetzt. Die unmischbaren und als inkompressibel und reibungsbehaftet modellierten Fluide sind an einem gemeinsamen Rand gekoppelt, der sich in Abhängigkeit von der Strömungssituation verformt. Oberflächenspannungseffekte fließen in die Formulierung der Kopplungsbedingungen am Fluid-Fluid-Rand ein und sind am Beispiel von in Flüssigkeit aufsteigenden Gasblasen validiert. Anschließende Beispiele untersuchen das dynamische Verhalten linearer und nichtlinearer Schwerewellen in ruhenden Behältern.

Eine weitere Anwendung findet das Verfahren in der Untersuchung elastischer Festkörper mit materialverschiedenen Einschlüssen und ausgebildeten Rissen. Die Kontaktfläche bzw. die Rißfläche ist mit Level-Set-Funktionen beschrieben und kann unabhängig von der räumlichen Strukturdiskretisierung im Festkörper positioniert sein. Ausgewählte Beispiele zeigen, daß das numerische Verfahren schon bei grober räumlicher Diskretisierung in der Lage ist, Kontaktunstetigkeiten und komplexe Rißgeometrien mit hoher Genauigkeit zu erfassen.

Die Formulierung der kontinuumsmechanischen Modellgleichungen für Fluid und Festkörper auf Basis der Beschreibungsgröße Geschwindigkeit und deren Diskretisierung mit der Raum-Zeit-Finite-Element-Methode eröffnet die ganzheitliche Analyse von Strömungs-Struktur-Wechselwirkungen. Die Verwendung der Methodik für Zwei-Fluid-Strömungen erschließt hierin jene Interaktionsphänomene, die vom Verhalten freier Grenzflächen im Strömungsgebiet dominiert sind. Die Eigenschaften einer schwappenden viskosen Flüssigkeit in einem federnd gelagerten Behälter werden untersucht. Maßstabsgetreue Experimente belegen im Fall einer auf ein starres bzw. elastisches Hindernis kollabierenden Wassersäule die Fähigkeit des numerischen Verfahren, komplexe Strömungssituationen mit freien Grenzflächen zu simulieren und das Verhalten gekoppelter Fluid-Struktur-Systeme abzubilden. Den Einstellvorgang stabiler Gleichgewichtslagen schwimmender Körper demonstriert ein abschließendes Verifikationsbeispiel.

7.2 Ausblick

Ein wesentlicher Aspekt beim Einsatz der Level-Set-Methode zur Bewegungsbeschreibung freier Grenzflächen ist die Volumenerhaltung der beteiligten Gebiete. In der hier verwendeten Level-Set-Formulierung unterliegt der Erhalt des Volumens stark den Auflösungseigenschaften des eingesetzten Berechnungsnetzes. Das Ziel zukünftiger Untersuchungen muß daher die Entwicklung geeigneter Ansätze zur Konservativitätssteigerung des Level-Set-Ansatzes sein. Die Vorteile weiterer Modelle zur impliziten Beschreibung von Grenzflächengeometrien können kombiniert werden [99] und führen mit erhöhtem numerischen Aufwand zu verbesserten Erhaltungseigenschaften. Als besonders aussichtsreich erscheint die Bildung hybrider Verfahren, die explizite und implizite Ansätze einander korrigierend einsetzen. Da die verwendeten Korrekturverfahren bisher nicht ohne Heuristiken auskommen, können noch keine Aussagen über die Konvergenzeigenschaften von hybriden Methoden getroffen werden.

Die auf die Level-Set-Funktion gestützte Erweiterung des Ansatzraumes eröffnet neue Möglichkeiten zur Behandlung wandernder Schockfronten – z.B. Verdichtungsstöße kompressibler Überschallströmungen – in numerischen Simulationsverfahren. Im Un-

terschied zu semidiskreten Methoden kann die erweiterte Raum-Zeit-Finite-Element-Approximation die zeitliche Entwicklung der räumlich diskontinuierlichen Lösung abbilden. Die konsequente Anwendung dieser Methode eröffnet die Möglichkeit, auf die bei Standardverfahren notwendige Netzverfeinerung zur Auflösung der Schockfront zu verzichten und mit deutlich reduzierter Freiwerteanzahl Ergebnisse von hoher Genauigkeit zu erzielen.

Literatur

- [1] D. Adalsteinsson & J. A. Sethian: *A Fast Level Set Method for Propagating Interfaces*. Journal of Computational Physics, 118, 269–277, 1995.
- [2] D. Adalsteinsson & J. A. Sethian: *The Fast Construction of Extension Velocities in Level Set Methods*. Journal of Computational Physics, 148, 2–22, 1999.
- [3] J. Altenbach & H. Altenbach: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. B.G. Teubner Verlag, Stuttgart, 1994.
- [4] J. H. Argyris & D. Scharpf: *Finite Elements in Space and Time*. Journal of Royal Aeronautical Society, 73, 1041–1044, 1969.
- [5] I. Babuška: *Error-Bounds for Finite Element Method*. Journal of Numerical Mathematics, 16, 322–333, 1971.
- [6] I. Babuška & J. M. Melenk: *The Partition of Unity Method*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 40, 727–758, 1997.
- [7] R. E. Bank, T. F. Dupont & H. Yserentant: *The Hierarchical Basis Multigrid Method*. Numerische Mathematik, 52, 427–458, 1988.
- [8] T. Barth & J. A. Sethian: *Numerical Schemes for the Hamilton-Jacobi and Level Set Equations on Triangulated Domains*. Journal of Computational Physics, 145, 1–40, 1998.
- [9] K. J. Bathe: *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1995.
- [10] M. Behr: *Stabilized Space-Time Finite Element Formulations for Free-Surface Flows*. Communications in Numerical Methods in Engineering, 11, 813–819, 2001.
- [11] T. Belytschko, H. Chuan, J. Xu & G. Zi: *Dynamic Crack Propagation Based on Loss of Hyperbolicity and a New Discontinuous Enrichment*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 58, 1873–1905, 2003.

- [12] T. Belytschko, J. Fish & B. E. Engelmann: *A Finite Element with Embedded Localization Zones*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 70, 59–89, 1988.
- [13] T. Belytschko, W. Liu & B. Moran: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Wiley, 2000.
- [14] T. Belytschko, Y. Y. Lu & L. Gu: *Element-Free Galerkin Methods*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, (37), 229–256, 1994.
- [15] T. Belytschko, T. Moës, S. Usui & C. Parimi: *Arbitrary Discontinuities in Finite Elements*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 50, 993–1013, 2001.
- [16] J. Brackbill, D. Kothe & C. Zemach: *A Continuum Method for Modeling Surface Tension*. Journal of Computational Physics, 100, 335–354, 1992.
- [17] F. Brezzi: *On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle-Point Problems Arising from Lagrange Multipliers*. RAIRO Anal. Numér., R-2, 129–151, 1974.
- [18] A. N. Brooks & T. J. R. Hughes: *Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 32, 199–259, 1982.
- [19] B. Bruggaier: *Aspekte eines ALE-Galerkin-Finit-Element-Verfahrens zur Simulation inkompressibler Flüssigkeiten mit beweglichen Trennflächen*. Dissertation, Technische Universität Darmstadt, 1995.
- [20] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni & T. A. Zang: *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. In Series of Computational Physics. Springer-Verlag, 1988.
- [21] P. Chaiser, Y. Fujino, B. M. Pacheco & L. M. Sun: *Interaction of Tuned Liquid Damper (TLD) and Structure: Theory, Experimental Verification and Application*. Structural Engineering/Earthquake Engineering, 6(2), 273–282, 1989.
- [22] Y. Chang, T. Hou, B. Merriman & S. Osher: *A Level Set Formulation of Eulerian Interface Capturing Methods for Incompressible Fluid Flows*. Journal of Computational Physics, 124, 449–464, 1996.
- [23] S. Chen, B. Merriman, S. Osher & P. Smereka: *A Simple Level Set Method for Solving Stefan Problems*. Journal of Computational Physics, 135, 8–29, 1997.

- [24] J. Chessa, P. Smolinski & T. Belytschko: *The Extended Finite Element Method (XFEM) for Stefan Problems*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 53, 1959–1977, 2002.
- [25] D. L. Chopp: *Computing Minimal Surfaces via Level Set Curvature Flow*. Journal of Computational Physics, 106, 77–91, 1993.
- [26] J. R. Clift, R. Grace & M. E. Weber: *Bubbles, Drops and Particles*. Academic Press, New York, 1978.
- [27] C. N. Daux, N. Moës, J. E. Dolbow & N. Sukumar: *Arbitrary Branched and Intersecting Cracks with the Extended Finite Element Method*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 48, 1741–1760, 2000.
- [28] J. E. Dolbow & R. Merle: *Solving Thermal and Phase Change Problems with the Extended Finite Element Method*. Computational Mechanics, 28(5), 339–350, 2002.
- [29] J. E. Dolbow, N. Moës & T. Belytschko: *Discontinuous Enrichment in Finite Elements with a Partition of Unity Method*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 36(3-4), 235–260, 2000.
- [30] D. Enright, R. Fedkiw, J. Ferziger & I. Mitchell: *A Hybrid Particle Level Set Method for Improved Interface Capturing*. Journal of Computational Physics, 183, 83–116, 2002.
- [31] L. Fan & K. Tsuchiya: *Bubble Wake Dynamics in Liquids and Liquid-Soil Suspensions*. Butterworth-Heinemann, 1990.
- [32] G. Fekken: *Numerical Simulation of Free-Surface Flow with Moving Rigid Bodies*. Dissertation, Rijksuniversiteit Groningen, 2004.
- [33] J. H. Ferziger & M. Perić: *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, 2002.
- [34] M. R. Frank & R. Lazarus: *Mixed Euler-Lagrange Method*. Methods in Computational Physics, 3, 47–67, 1964.
- [35] I. Fried: *Finite Element Analysis of Time-dependent Phenomena*. AIAA Journal, 7, 1170–1173, 1969.
- [36] J. Gomes & O. Faugeras: *Reconciling Distance Functions and Level Sets*. Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis, 1999.

- [37] A. A. Griffith: *The Phenomena of Rupture and Flow in Solids*. Philosophical Transactions of the Royal Society, Ser. A221, 163–198, 1921.
- [38] B. A. Grohmann: *Stabilized Space-Time Finite Elements for Transonic Aeroelasticity*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2001.
- [39] P. Hansbo: *The Characteristic Streamline Diffusion Method for the Time-Dependent Incompressible Navier-Stokes Equations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 99, 171–186, 1992.
- [40] F. Harlow & J. Welch: *Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with a Free Surface*. The Physics of Fluids, 8, 2182–2189, 1965.
- [41] F. H. Harlow & A. A. Amsden: *Relativistic Fluid Dynamics Calculations with the Particle-In-Cell Technique*. Journal of Computational Physics, 20, 119–129, 1976.
- [42] B. T. Helenbrook, L. Martinelli & C. Law: *A Numerical Method for Solving Incompressible Flow Problems with a Surface of Discontinuity*. Journal of Computational Physics, 148, 366–396, 1999.
- [43] C. W. Hirt & B. D. Nichols: *Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries*. Journal of Computational Physics, 39, 201–225, 1981.
- [44] H. C. Hu: *On Some Variational Methods on the Theory of Elasticity and the Theory of Plasticity*. Scientia Sinica, 4, 33–54, 1955.
- [45] B. Hübner: *Simultane Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, Braunschweig, 2003.
- [46] B. Hübner, E. Walhorn & D. Dinkler: *A Monolithic Approach to Fluid-Structure Interaction using Space-Time Finite Elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193(23–26), 2069–2086, 2004.
- [47] A. E. Huespe, J. Oliver, M. D. Pulido & E. Samaniego: *On Computational Procedures for Modelling Strong Discontinuities in Finite Deformation Plasticity*. In European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2000), 2000.
- [48] T. J. R. Hughes, L. P. Franca & G. M. Hulbert: *A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: VIII. The Galerkin/Least-Squares Method for Advective-Diffusive Equations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 73, 173–189, 1989.

- [49] G. R. Irwin: *Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate*. Journal of Applied Mechanics, (24), 361–364, 1957.
- [50] M. Jirasek: *Comparative Study on Finite Elements with Embedded Discontinuities*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 188, 307–330, 2000.
- [51] G. Johnson: *Discontinuous Galerkin Finite Element Methods for Second Order Hyperbolic Problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 107, 117–129, 1993.
- [52] D. Juric & G. Tryggvason: *Computations of Boiling Flows*. International Journal of Multiphase Flow, 24, 387–410, 1998.
- [53] J. Knippers & R. Harbord: *A Mixed Hybrid FE-Formulation for Solution of Elasto-Viscoplastic Problems*. Computational Mechanics, 13, 231–240, 1994.
- [54] J. Ko, A. J. Kurdila & M. S. Pilant: *A Class of Finite Element Methods Based on Orthonormal Compactly Supported Wavelets*. Computational Mechanics, 16, 235–244, 1995.
- [55] C. G. Koh, S. Mahatma & C. M. Wang: *Theoretical and Experimental Studies on Rectangular Liquid Dampers Under Arbitrary Excitations*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 3(1), 17–31, 1994.
- [56] A. Kölke & D. Dinkler: *Extended Space-Time Finite Elements for Two-Fluid Flows in Fluid-Structure Interaction*. In M. Papadrakis, E. Onate & B. Schrefler, editors, Proceedings of Sixth World Congress on Computational Mechanics Beijing. WCCM, 2004.
- [57] A. Kölke, E. Walhorn, B. Hübner & D. Dinkler: *Strongly Coupled Analysis of Fluid-Structure Interaction with Two-Fluid-Flows*. In P. Neittaanmäki, editor, Fourth European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, 2004.
- [58] S. Koshizuka, H. Tamako & Y. Oka: *A Particle Method for Incompressible Viscous Flows with Fluid Fragmentation*. Computational Fluid Dynamics Journal, 4, 29–46, 1995.
- [59] E. Liu & Z. Zhang: *Numerical Study of Elastic Wave Scattering by Cracks or Inclusions Using the Boundary Integral Equation Method*. Journal of Computational Acoustics, 9(3), 1039–1054, 2001.
- [60] W. E. Lorensen & H. E. Cline: *Marching Cubes: A High Resolution 3D Surface Reconstruction Algorithm*. Computer Graphics, 21, 163–169, 1987.

- [61] J. C. Martin & W. J. Moyce: *An Experimental Study of the Collapse of a Liquid Column on a Rigid Horizontal Plane*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A244, 312–324, 1952.
- [62] A. Masud & T. J. R. Hughes: *A Space-Time Galerkin/Least-Squares Finite Element Formulation of the Navier-Stokes Equations for Moving Domain Problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 146, 91–126, 1997.
- [63] J. M. Melenk & I. Babuška: *The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 39, 289–314, 1996.
- [64] N. Moës, J. E. Dolbow & T. Belytschko: *A Finite Element Method for Crack Growth Without Remeshing*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 46, 131–150, 1999.
- [65] D. Mok & W. A. Wall: *Partitioned Analysis Schemes for the Transient Interaction of Incompressible Flows and Nonlinear Flexible Structures*. In W. A. Wall, K.-U. Bletzinger & K. Schweizerhof, editors, Trends in Computational Structural Mechanics. CIMNE, 2001.
- [66] D. P. Mok: *Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2001.
- [67] E. Naudascher & D. Rockwell: *Flow-Induced Vibrations: An Engineering Guide*. A.A. Balkema, Rotterdam, 1994.
- [68] J. T. A. Oden: *A General Theory of Finite Elements. Part I: Topological Considerations*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 1, 205–221, 1969.
- [69] H. Oertel, D. Etling, U. Müller & J. Warnatz: *Prandtl-Führer durch die Strömungslehre*. Vieweg-Verlag, 2001.
- [70] J. Oliver, A. E. Huespe, M. D. G. Pulido & E. Chaves: *From Continuum Mechanics to Fracture Mechanics: The Strong Discontinuity Approach*. Engineering Fracture Mechanics, 69, 113–136, 2001.
- [71] J. Oliver, A. E. Huespe & E. Samaniego: *A Study on Finite Elements for Capturing Strong Discontinuities*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 56, 2135–2161, 2003.
- [72] M. Ortiz, Y. Leroy & A. Needleman: *A Finite Element Method for Localized Failure Analysis*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 61, 198–214, 1987.

- [73] S. Osher & R. Fedkiw: *Level Set Methods: An Overview and Some Recent Results*. Journal of Computational Physics, 79, 463–502, 2001.
- [74] S. Osher & R. Fedkiw: *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer, New York, 2003.
- [75] S. Osher & J. A. Sethian: *Fronts Propagating with Curvature-Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations*. Journal of Computational Physics, 79, 12–49, 1988.
- [76] P. C. Paris & F. Erdogan: *A Critical Analysis of Crack Propagation Laws*. Journal of Basic Engineering, 85, 528–534, 1963.
- [77] P. E. Raad, S. Chen & D. B. Johnson: *The Introduction of Micro Cells to Treat Pressure in Free Surface Fluid Flow Problems*. Journal of Fluids in Engineering, 117, 683–690, 1995.
- [78] J. R. Rice & G. F. Rosengreen: *Plane Strain Deformation Near a Crack Tip in a Power-Law Hardening Material*. Journal of Mechanics and Physics of Solids, (16), 1–12, 1968.
- [79] G. Russo & P. Smereka: *A Remark on Computing Distance Functions*. Journal of Computational Physics, 163, 51–67, 2000.
- [80] S. Sähn & H. Göldner: *Bruch- und Beurteilungskriterien in der Festigkeitslehre*. Fachbuchverlag Leipzig, Leipzig, 1993.
- [81] J. Sauer: *Instationär kavitierende Strömungen - Ein neues Modell, basierend auf Front Capturing (VoF) und Blasendynamik*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 2000.
- [82] R. Scardovelli & S. Zaleski: *Direct Numerical Simulation of Free-Surface and Interfacial Flow*. Annu. Rev. Fluid Mech., 31, 567–603, 1999.
- [83] M. Schlüter: *Blasenbewegung in praxisrelevanten Zweiphasenströmungen*. Dissertation, Universität Bremen, 2002.
- [84] J. A. Sethian: *A Fast Marching Level Set Method for Monotonically Advancing Fronts*. Proc. Nat. Acad. Sci., 93, 1591–1595, 1996.
- [85] J. A. Sethian: *Fast Marching Methods*. SIAM Review, 41, 199–235, 1999.
- [86] J. A. Sethian: *Level Set Methods and Fast Marching Methods*. Cambridge University Press, 2 edition, 1999.

- [87] F. Shakib, T. J. R. Hughes & Z. Johan: *A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: X. The Compressible Euler and Navier-Stokes Equations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 89(141–219), 1991.
- [88] J. R. Shewchuk: *Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator*. In M. C. Lin & D. Manocha, editors, Applied Computational Geometry: Towards Geometric Engineering, volume 1148 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 203–222. Springer-Verlag, May 1996. From the First ACM Workshop on Applied Computational Geometry.
- [89] W. Shyy, H. H. Udaykumar, M. M. Rao & R. W. Smith: *Computational Fluid Dynamics with Moving Boundaries*. Taylor and Francis, 1996.
- [90] A. Smolianski: *Numerical Modeling of Two-Fluid Interfacial Flows*. Dissertation, University of Jyväskylä, Jyväskylä, 2001.
- [91] G. Son & V. K. Dir: *Numerical Simulation of Film Boiling near Critical Pressures with a Level Set Method*. Journal of Heat Transfer, 120, 183–192, 1998.
- [92] J. Steindorf: *Partitionierte Verfahren für Probleme der Fluid-Struktur-Wechselwirkung*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 2002.
- [93] M. Stolarska, C. D., N. Moës & T. Belytschko: *Modeling Crack Growth by Level Sets and the Extended Finite Element Method*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 51(8), 943–960, 2001.
- [94] J. Strain: *Fast Tree-Based Redistancing for Level Set Computations*. Journal of Computational Physics, 152, 664–686, 1999.
- [95] A. H. Stroud: *Approximate Calculation of Multiple Integrals*. Prentice Hall, New Jersey, 1971.
- [96] N. Sukumar, D. Chopp, N. Moës & T. Belytschko: *Modeling Holes and Inclusions by Level Sets in the Extended Finite Element Method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190(46-47), 6183–6200, 2000.
- [97] M. Sussmann & E. Fatemi: *An Efficient Interface-Preserving Level Set Redistancing Algorithm and Its Application to Interfacial Incompressible Fluid Flow*. SIAM Journal of Scientific Computing, 20, 1165–1191, 1999.
- [98] M. Sussmann, E. Fatemi, P. Smereka & S. Osher: *An Improved Level Set Method for Incompressible Two-Phase Flows*. Computers and Fluids, 27, 663–680, 1998.

- [99] M. Sussmann & E. Puckett: *A Coupled Level Set and Volume-of-Fluid Method for Computing 3D and Axisymmetric Incompressible Two-Phase Flows*. Journal of Computational Physics, 162, 301–337, 2000.
- [100] M. Sussmann, P. Smereka & S. Osher: *A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flows*. Journal of Computational Physics, 114, 146–159, 1994.
- [101] I. Tadjbakhsh & J. B. Keller: *Standing Surface Waves of Finite Amplitude*. Journal of Fluid Mechanics, 8, 442–451, 1960.
- [102] T. E. Tezduyar, M. Behr & J. Liou: *A New Strategy for Finite Element Computations Involving Moving Boundaries and Interfaces - The Deforming-Spatial-Domain/Space-Time Procedure: I. The Concept and the Preliminary Numerical Tests*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 94, 339–351, 1992.
- [103] T. E. Tezduyar, M. Behr & J. Liou: *A New Strategy for Finite Element Computations Involving Moving Boundaries and Interfaces - The Deforming-Spatial-Domain/Space-Time Procedure: II. Computation of Free-surface Flows, Two-liquid Flows, and Flows with Drifting Cylinders*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 94, 353–371, 1992.
- [104] A.-K. Tornberg & B. Engquist: *A Finite Element Based Level Set Method for Multiphase Flow Applications*. Computing and Visualization in Science, 3, 93–101, 2000.
- [105] E. L. Wachspress: *A Rational Finite Element Basis*. Academic Press, 1975.
- [106] E. Walhorn: *Ein simultanes Berechnungsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkungen mit finiten Raum-Zeit-Elementen*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, Braunschweig, 2002.
- [107] O. C. Zienkiewicz, D. W. Kelly, J. P. de S.R. Gago & I. Babuška: *Hierarchical Finite Element Approaches, Adaptive Refinement and Error Estimates*. In The Mathematics of Finite Elements and Applications, pages 313–346. Academic Press, New York, 1982.
- [108] O. C. Zienkiewicz & R. L. Taylor: *The Finite Element Method. Volume 1: The Basis. Volume 2: Solid Mechanics. Volume 3: Fluid Dynamics*. Butterworth-Heinemann, 2000.

Wir schweben.

Berichte aus dem Institut für Statik ab 1991

- | | | |
|-----|-------|---|
| Nr. | 91-63 | S. KIELBASSA: Standsicherheit der Tunnelortsbrust bei Vortrieb in wassergesättigtem Ton (1991). |
| Nr. | 91-64 | R. MEYER: Mehraxiales Werkstoffmodell für Beton mit einheitlichem Konzept im Vor- und Nachbruchbereich (1991). |
| Nr. | 91-65 | L. PISARSKY: Zur Berechnung nichtmonoton beanspruchter wassergesättigter Tonböden (1991). |
| Nr. | 91-66 | I. SOLIMAN: Ebene und räumliche Spannungs- und Verformungszustände von zwei nacheinander aufgefahrenen Tunnelröhren (1991). |
| Nr. | 92-67 | K. KREMER: Randelement-Methode für elastisch-plastische Strukturberechnungen im Grundbau und ihre Kopplung mit der Finite-Element-Methode (1992). |
| Nr. | 91-68 | Z. HUANG: Beanspruchungen des Tunnelausbaus bei zeitabhängigem Materialverhalten von Beton und Gebirge (1991). |
| Nr. | 93-69 | G. KRACHT: Erschließung viskoplastischer Stoffmodelle für thermomechanische Strukturanalysen (1993). |
| Nr. | 92-70 | E.-R. TIRPITZ: Elasto-plastische Erweiterung von viskoplastischen Stoffmodellen für Metalle (1992). |
| Nr. | 92-71 | H. BRAASCH: Ein Konzept zur Fortentwicklung und Anwendung viskoplastischer Werkstoffmodelle (1992). |
| Nr. | 93-72 | B. HU: Berechnung des geometrisch und physikalisch nichtlinearen Verhaltens von Flächentragwerken aus Stahl unter hohen Temperaturen (1993). |
| Nr. | 93-73 | C. ZHANG, M. SCHMIDT, G. STAUPENDAHL, U. HEEMANN: Entwicklung eines Stoffansatzes zur Beschreibung des Kompaktionsverhaltens von Salzgrus, GSF-Forschungszentrum für Umwelt und Gesundheit, Institut für Tieflagerung (1993). |
| Nr. | 93-74 | S. MATTHIESEN: Standsicherheitsuntersuchungen für Salzbergwerke mit vertikalen Kammerabbauen (1993). |
| Nr. | 93-75 | Mitarbeiter des Instituts: Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Heinz Duddeck zur Vollendung des 65. Lebensjahres gewidmet (1993). |
| Nr. | 93-76 | G. TRANEL: Stabilitätsnachweis beliebiger Schalen mit dem Konzept der Störenergie (1993). |
| Nr. | 93-77 | J. HUCKFELDT: Thermomechanik hydratisierenden Betons – Theorie, Numerik und Anwendung (1993). |

- Nr. 94-78 U. KOWALSKY: Mikrophysikalisch begründetes Werkstoffmodell zur Berechnung thermomechanisch beanspruchter Konstruktionen (1994).
- Nr. 95-79 N. OBERBECK: Instationärer Wärme-Feuchte-Schadstoff - Transport in Beton, Theorie und Berechnung (1995).
- Nr. 95-80 N. MELEKA: Nonlinear Analysis of Flat Slab Floors (1995).
- Nr. 97-81 H. FLOREN: Strukturanalysen unterirdischer Hohlräume im Salzgebirge mit hybriden Randelement- / Finite-Element-Methoden (1997).
- Nr. 96-82 T. GARTUNG: Berechnung von Asphaltstraßen mit einem einheitlichen rheologischen Konzept einschließlich Schädigung (1996).
- Nr. 97-83 T. STREILEIN: Erfassung formativer Verfestigung in viskoplastischen Stoffmodellen (1997).
- Nr. 97-84 B. GUERICKE: Geomechanische Untersuchungen zur Sicherheitsanalyse von Deponien im Salzgestein (1997).
- Nr. 97-85 U. GLABISCH: Stoffmodell für Grenzzustände im Salzgestein zur Berechnung von Gebirgshohlräumen (1997).
- Nr. 97-86 E. ELARABI: Numerical Analysis of the Swelling Soil Effects on Structures (1997).
- Nr. 98-87 I. SPOHR: Störenergie-Konzept für den elasto-plastischen Beulsnicherheitsnachweis beliebig belasteter Zylinderschalen (1998).
- Nr. 99-88 C.-X. HUANG: Berechnung von Temperaturspannungen und Rißbildungen infolge Hydratation in 3D-Betonkonstruktionen (1999).
- Nr. 2000-89 H. PENSKY: Beschreibung von streuendem Materialverhalten und von Schädigung bei inelastischen Werkstoffen (2000).
- Nr. 2000-90 A. STEFFENS: Modellierung von Karbonatisierung und Chloridbindung zur numerischen Analyse der Korrosionsgefährdung der Betonbewehrung (2000).
- Nr. 2001-91 J. EBERS-ERNST: Modellierung des inelastischen Verformungsverhaltens von Siedlungsabfalldeponien (2001).
- Nr. 2001-92 J. HANEL: Modell zur Analyse von gekoppelten Transport- und Stoffabbauprozessen in Deponien (2001).
- Nr. 2002-93 B. WIEDEMANN: Modelle für vorgespannte Membranen mit Faltenbildung (2002).
- Nr. 2002-94 R. TACKE: Feuchte- und Festigkeitsentwicklung hydratisierenden Betons – Modellierung und numerische Analyse (2002).

- | | | |
|-----|---------|---|
| Nr. | 2002-95 | E. WALHORN: Ein simultanes Berechnungsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkungen mit finiten Raum-Zeit-Elementen (2002). |
| Nr. | 2003-96 | B. HÜBNER: Simultane Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen (2003). |
| Nr. | 2003-97 | J. GEISTEFELDT: Stochastische Finite-Element-Methoden mit Anwendung auf aeroelastische Tragsysteme (2003). |
| Nr. | 2003-98 | O. KNOKE: Beulwiderstände zusammengesetzter Zylinder-Kegel-Schalen (2003). |

Sonderdrucke

Phänomenologische Modelle für Werkstoffe des Bauwesens.
Hermann Ahrens zum 60. Geburtstag (1998).
Herausgeber: D. Dinkler, U. Kowalsky.

Baustatik-Baupraxis 8.
Berichte der Fachtagung am 21. und 22. März 2002 in Braunschweig.
Herausgeber: D. Dinkler.

Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig
Beethovenstraße 51, 38106 Braunschweig, Deutschland
Telefon +49 (0)531 / 391-3667, Telefax +49 (0)531 / 391-8116
E-Mail statik@tu-bs.de, Homepage <http://www.statik.tu-bs.de>